

# Préparation à l'oral

## Polycopié 1

*Les exercices corrigés en classe prioritairement sont ceux dont les intitulés sont en majuscules.*

### I CCINP (30m, avec préparation de 30m)

#### 1 Analyse et algèbre.

**Exercice 1 :** On considère une suite  $(a_n)$  décroissante et convergeant vers 0. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n : x \mapsto a_n \sin(nx)$ .

1. Montrer que  $\sum u_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $\sum a_n$  converge.
2. Pour  $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ , on pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $T_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin(kx)$ , et  $T_0(x) = 0$ .

Montrer que  $|T_n(x)| \leq \frac{1}{\left| \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right|}$ .

3. Montrer que  $\sum u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 2 :** On donne  $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$  de spectre  $Sp(A) = \{1; 3; -4\}$ .

Déterminer le cardinal de l'ensemble des solutions de l'équation  $M^2 = A$  d'inconnue  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , puis d'inconnue d'inconnue  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ .

### II Centrale Math-Info (30m, avec préparation de 30m)

#### 2 ALGEBRE.

On considère  $E = \mathbb{R}[X]$  muni du produit scalaire  $(P, Q) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ , en écrivant  $P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$  et

$$Q(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n.$$

1. On considère  $\psi$  une forme linéaire continue sur  $E$ . Montrer que  $\text{Ker}(\psi)$  est fermé.
2. On pose  $\phi : P \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$ , en écrivant  $P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ , et  $q : P \mapsto \frac{\phi(P)}{\|P\|}$ .  
A l'aide d'un programme Python, écrire un programme qui génère aléatoirement des polynômes  $P$  représentés par des listes de coefficients, et qui calcule  $q(P)$ . Que conjecture-t-on sur  $q$  ?
3. Démontrer la conjecture.
4. En déduire que  $\text{Ker}(\phi)$  est fermé.
5. Pour  $A$  une partie de  $E$ , montrer que  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $E$ .

#### 3 ALGEBRE.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 3$ . On définit la matrice  $M_n$  d'ordre  $n$  dont les coefficients sont nuls partout sauf ceux de la première colonne, la première et la dernière ligne qui valent 1.

1. Ecrire en Python une fonction qui renvoie la matrice  $M_n$  en fonction de  $n$ .
2. Pour  $n \in \llbracket 3; 6 \rrbracket$ , calculer avec Python  $(\lambda - 1)^2$  pour  $\lambda$  décrivant le spectre de  $M_n$ .  
Conjecturer les valeurs propres de  $M_n$ .
3. Déterminer le spectre et les vecteurs propres de  $M_n$ .
4. La matrice  $M_n$  est-elle diagonalisable ?

**4 ANALYSE.**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère l'équation

$$(E_n) \quad : \quad nx^3 + n^2x - 2 = 0$$

1. Tracer à l'aide de Python dans un même repère les courbes  $y = nx^3 + n^2x - 2$  pour  $n = 10$  à  $n = 20$  sur l'intervalle  $[0, 0.01]$ .
2. Montrer que  $(E_n)$  admet une unique solution  $u_n$  dans  $\mathbb{R}$ .
3. Etudier la convergence de la suite  $(u_n)$  et, le cas échéant, donner sa limite.
4. Tracer à l'aide de Python les valeurs de  $n^2u_n$  pour  $n \in \llbracket 1, 100 \rrbracket$ .
5. Etudier la nature de la série de terme général  $u_n$ .
6. Déterminer un développement asymptotique de  $u_n$  à l'ordre 7 en  $1/n$ .

**5 Analyse.**

On définit la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad u_n = \left[ \prod_{k=0}^n \binom{n}{k} \right] \frac{1}{n+1}$$

1. Déterminer les premiers termes de la suite  $(u_n)$  à l'aide de Python.
2. On pose  $G_n = \sqrt[n]{u_n}$ . Déterminer les premiers termes de la suite  $(G_n)_{n \geq 1}$  à l'aide de Python. Que remarque-t-on ?
3. Démontrer les deux égalités :

$$\prod_{p=0}^n p! = \prod_{p=1}^n p^{n+1-p} \quad \text{et} \quad \prod_{p=0}^n \binom{n}{p} = \prod_{p=1}^n p^{2p-n-1}.$$

4. En déduire que pour  $n \geq 1$  :

$$\ln(G_n) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{p=1}^n (2p - n - 1) \ln \left( \frac{p}{n+1} \right).$$

5. Montrer que la suite  $(G_n)$  converge.

**6** **PROBABILITES.**

On considère une urne contenant une boule noire et une boule blanche. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne. A chaque tirage, on remplace la boule obtenue accompagnée d'une boule de la même couleur.

Soit  $X_n$  le nombre de boules noires obtenues au cours des  $n$  premiers tirages.

- Déterminer la loi de  $X_1$  et  $X_2$ .
- Montrer que  $X_n$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 0; n \rrbracket$ .
- On note  $B_n$  l'événement : "Tirer une boule blanche au  $n$ -ème tirage. calculer  $P(B_{n+1})$ . Que remarque-t-on ?
- Ecrire une fonction Python qui simule  $n$  tirages de l'urne et renvoie la fréquence d'apparition des boules noires à l'issue des  $n$  tirages.  
Calculer les fréquences d'apparition des boules noires lors de 10000 expériences de 500 tirages et représenter l'histogramme des fréquences.
- On suppose maintenant que l'urne contient initialement  $a$  boules noires et  $b$  boules blanches. Montrer que pour tout  $k$  dans  $\llbracket 0; n \rrbracket$  :

$$P(X_n = k) = \frac{\binom{a+k-1}{k} \binom{b+n-k-1}{n-k}}{\binom{a+b+n-1}{n}}.$$

- On note  $N_n$  l'événement : "Tirer une boule noire au  $n$ -ème tirage. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(N_n) = \frac{a}{a+b}$$

**7** **Probabilités.**

Soit  $\lambda > 0$  et  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . On s'intéresse à  $p_\lambda = P(X = Y)$ .

- Montrer que  $p_\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(n!)^2} e^{-2\lambda}$ .
- Ecrire une fonction Python  $p(\lambda)$  qui donne  $p_\lambda$ .  
indication : on considère que la somme infinie est proche de celle d'indice 100 ; calculer chaque nouveau terme à l'aide du précédent.
- Tracer le graphe de  $\lambda \mapsto \sqrt{\lambda} p_\lambda$  sur  $[1, 50]$ . Conjecture ?
- Ecrire une fonction qui prend un réel  $x$  en entrée et qui renvoie la valeur de l'intégrale

$$f(x) = e^{-x} \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(x \sin \theta) d\theta.$$

- On pose  $g(\lambda) = \frac{2}{\pi} f(2\lambda)$ . Tracer les graphes de  $g$  et  $\lambda \mapsto p_\lambda$  sur le même graphe. Conjecture ?
- Calculer  $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(\theta) d\theta$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- Démontrer la conjecture faite en 5.
- Montrer qu'en  $+\infty$ ,  $f(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-2x \sin^2(\theta/2)} d\theta + O(e^{-x})$ .
- Montrer que pour tout  $t \in [0, \pi/2]$ ,  $\sin(t) \geq \frac{2t}{\pi}$ .
- En déduire la preuve du résultat conjecturé en 3.

### III Centrale Math (30m sans préparation)

Algèbre

**8 ALGÈBRE.**

On munit  $\mathbb{R}^2$  de sa norme euclidienne canonique.

$A$  et  $B$  désignent de parties de  $\mathbb{R}^2$ .

On pose  $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$

1. Démontrer que si  $A$  ou  $B$  est ouvert,  $A + B$  est ouvert.
2. Si  $A$  et  $B$  sont fermés,  $A + B$  est-il nécessairement fermé ?

**9 ALGÈBRE.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Déterminer le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{p \geq 0} \text{Tr}(A^p) z^p,$$

et calculer sa somme en fonction du polynôme caractéristique de  $A$ .

**10 ALGÈBRE.**

Résoudre le système :

$$\begin{cases} A^T A^2 = A \\ \text{Tr}(A) = n \end{cases},$$

d'inconnue  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**11 Algèbre.**

Soit  $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$

1. La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?
2. Donner une base du noyau de  $\text{Ker}(M - I_n)$ .
3. Est-il vrai que  $\text{Ker}(M - I_n) \oplus \text{Im}(M - I_n) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ?

**12 Algèbre.**

On munit  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  du produit scalaire canonique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  associé à la norme  $\|\cdot\|$ . Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  $N(A) = \sup \{\|AX\|, \|X\| = 1\}$ .

1. Montrer que  $N$  est une norme.
2. On pose  $\rho(A) = \max \{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(A)\}$ .
  - (a) Montrer que  $N(A) = \sqrt{\rho(A^T A)}$ .
  - (b) Montrer que  $\rho(A^T A) = \rho(AA^T)$ .

Analyse

**13 ANALYSE.**

On note

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq y \leq 1\} \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 < x < y < 1\}$$

Chercher les extrema de la fonction  $f : (x, y) \mapsto (y - x)^3 + 6xy$  sur  $\overset{\circ}{D}$ , puis sur  $D$ .

**14 ANALYSE.**

Pour  $x > 0$ , on pose  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx)}$ .

1. Montrer que  $S$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Donner la limite, puis un équivalent de  $S$  en  $+\infty$ .
3. Donner la limite, puis un équivalent de  $S$  en  $0^+$ .

**15 ANALYSE.**

1. Montrer qu'il existe une unique fonction  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x^2}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
2. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
3. Montrer que  $f$  est intégrable  $[1, +\infty[$ .

**16 ANALYSE.**

On pose  $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{t - \ln(t)}$ .

Etudier  $f$  (ensemble de définition, continuité, dérivabilité, tableau de variations, équivalents aux bornes de l'ensemble de définition).

**17 ANALYSE.**

On considère la fonction  $S$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} e^{inx}$

1. Démontrer que  $S$  est bien définie et de classe  $\mathbb{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on pose  $U_k = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} n^k$ .  
Démontrer que  $U_k$  existe bien puis que  $U_k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} O(k!)$ .
3. Démontrer que  $S$  est développable en série entière sur un intervalle à préciser.

**18 ANALYSE.**

Pour  $x \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{1/k}$

1. Etudier la convergence simple de la fonction  $(f_n)$ .
2. La suite  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $[0, 1]$ ? Sur  $[a, 1]$ , avec  $a > 0$ ?
3. Etudier les variations de la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  pour  $x \in [0, 1]$  fixé.
4. Soit  $b \in [0, 1[$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un seul réel  $a_n$  tel que  $f_n(a_n) = b$ .
5. Montrer que  $(a_n)$  converge et déterminer sa limite.

**19** ANALYSE.

On pose  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt$

1. Donner le domaine de définition de la fonction  $f$ .
2. Etudier la continuité de  $f$  sur son ensemble de définition.
3. Déterminer la limite de  $f$  en 0.
4. Donner un équivalent de  $f$  au voisinage de 0.

**20** ANALYSE.

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ .

Pour toute fonction  $f$  dans  $E$ , on note  $\varphi(f)$  la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(f)(x) = \int_x^{2x} f(t) dt.$$

1. Démontrer que  $\varphi$  est un endomorphisme injectif de  $E$ .
2. Montrer que :  $Im(\varphi) = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(0) = 0\}$

**21** Analyse.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , pour  $x \in ]0, 1[$ , on pose  $f_n(x) = \frac{x^{2n+1} \ln(x)}{x^2 - 1}$ .

1. Montrer que  $f_n$  est intégrable sur  $]0, 1[$ . On pose  $I_n = \int_0^1 f_n$ .
2. Montrer que  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.
3. Montrer que  $I_n = \frac{1}{4} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ .

**22** Analyse.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $f_n$  sur  $\mathbb{R}_+$  par  $f_n : x \mapsto \text{th}(x+n) - \text{th}(n)$ . On pose  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ .

1. Montrer que  $S$  est définie, continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .
2.  $S$  admet-elle une limite en  $+\infty$  ?
3. Mêmes questions avec  $f_n : x \mapsto \tan(x+n) - \tan(n)$ .

**23** Analyse.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction  $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ .
2. Montrer que  $f : x \mapsto \int_0^1 e^{-xt^n} g(t) dt$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$  pour toute fonction  $g$  continue sur  $[0, 1]$ .
3. On suppose de plus que  $g(0) \neq 0$ . À l'aide d'un changement de variable, montrer que  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(\frac{1}{n})}{nx^{1/n}} g(0)$ .

**24** Analyse.

Soit  $(a_n)$  une suite bornée de réels. On considère la fonction  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ .

1. Montrer que  $f$  est bien définie.
2. On suppose que que la série  $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$  converge. Montrer que  $f(x) \underset{+\infty}{=} o(e^x)$

**25** Analyse.

1. Soit  $I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt$ .  
Démontrer que l'intégrale  $I$  converge, et que  $I = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ .
2. Soit  $f$  une fonction continue et croissante sur  $[0, 1[$ . On suppose que  $\int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$  converge.  
Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( (1-x) \sum_{k=0}^{+\infty} f(x^k) \right) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$ .
3. Donner un équivalent de  $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1-x^k)$  lorsque  $x$  tend vers  $1^-$ .

**26** Analyse.

Soit  $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln(n) x^n$ .

1. Donner le rayon de convergence de  $f$ .
2. On pose  $g(x) = (1+x)f(x)$ . Déterminer les limites de  $g$  et  $f$  en 1.

**Dénombrement et probabilités**

**27 ANALYSE, DENOMBREMENT.**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $p_n$  le nombre de  $n+1$ -uplets d'entiers naturels  $(x_0, \dots, x_n)$  qui vérifient  $x_0 + \dots + x_n = n$ .

1. On admet que  $p_n = \binom{2n}{n}$ . Déterminer l'ensemble de convergence et l'expression de la somme de la série entière  $\sum \frac{p_n}{4^n} x^n$ .
2. Montrer que  $p_n = \binom{2n}{n}$ .

**28 PROBABILITES.**

On dispose  $N$  pièces truquées, pour lesquelles la probabilité d'obtenir "Pile" à chaque lancer vaut  $p \in ]0, 1[$ .  
On note  $q = 1 - p$ .

- On lance les  $N$  pièces à la première étape.
- A la deuxième étape, on lance les pièces ayant obtenu "Pile" à la première étape.
- On continue ainsi, et à chaque étape on lance les pièces ayant obtenu "Pile" à l'étape précédente.

On pose  $X_0 = N$  et, pour  $n \geq 1$ , note  $X_n$  le nombre de "Pile" obtenus à l'étape  $n$ , et  $U_n$  la matrice colonne de coordonnées  $P(X_n = 0), \dots, P(X_n = N)$ .

1. Déterminer une matrice  $A$  telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$ .  $A$  est-elle diagonalisable ? Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ ,  $A$  et  $U_0$ .
2. On pose  $\varphi : \begin{matrix} R_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(pX + q) \end{matrix}$ . Déterminer la matrice de  $\varphi$  dans la base canonique, et en déduire la loi de  $X_n$ .
3. Proposer une autre méthode pour obtenir la loi de  $X_n$ .

**29 Probabilités.**

On lance deux pièces équilibrées  $n$  fois, et on note  $A_n$  l'événement : "On obtient autant de Piles que de Faces", et  $p_n$  la probabilité de  $A_n$ .

1. Montrer que  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ .
2. Calculer  $p_n$
3. Donner le rayon de convergence de la série entière :  $\sum p_n x^n$

**30 Probabilités.**

On dispose d'une pièce de monnaie qui donne PILE avec probabilité  $p \in ]0, 1[$ . On lance cette pièce jusqu'à obtenir PILE, et on pose  $N$  le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier PILE. On lance ensuite  $N$  fois la pièce et on note  $X$  le nombre de PILES obtenus.

1. Donner la loi de  $N$  puis du couple  $(N, X)$ .
2. En déduire la loi de  $X$ .
3. On considère  $\lambda \in ]0, 1[$   $U, V$  deux variables aléatoires indépendantes vérifiant  $U \sim \mathcal{B}(\lambda)$  (Bernouilli de paramètre  $\lambda$ ) et  $V \sim \mathcal{G}(\lambda)$  (géométrique de paramètre  $\lambda$ ). Déterminer  $\lambda$  tel que  $UV \sim X$ .
4. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

## IV Mines-ponts (1h, avec 15m de préparation)

### Algèbre

#### 31 ALGÈBRE.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  nilpotente d'indice  $n$ . On pose :

$$C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AM = MA\}$$

Montrer que  $C(A) = \mathbb{C}[A]$ .

#### 32 ALGÈBRE.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $q \in \mathbb{N}^*$  tels que  $A^q = I_n$ .

Montrer que :

$$\dim(\ker(A - I_n)) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q \text{Tr}(A^k).$$

#### 33 ALGÈBRE.

1. On pose  $P(X) = X^n - X + 1$ . Donner le nombre de racines réelles de  $P$ .
2. Démontrer que le polynôme  $P$  est scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}[X]$ .
3. Soit  $A$  définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice  $A$  est-elle diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ?

#### 34 Algèbre.

On pose  $\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$  pour  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ .

1. Montrer que  $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ .
2. Trouver une base de  $\text{Ker}(\Delta)$  et  $\text{Im}(\Delta)$ .
3. Trouver une base  $\mathcal{B}$  telle que la matrice de  $\Delta$  dans cette base ne contienne que des 0 et des 1.
4. Doit  $d \in \mathbb{N}$ . Montrer qu'il existe un polynôme  $Q$  de degré  $d+1$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, Q(n) = \sum_{k=0}^n k^d$$

5. Calculer de deux façons différentes un équivalent de  $\sum_{k=0}^n k^d$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

#### 35 Algèbre.

Soit  $n \geq 1$ . Soit  $P$  un polynôme à coefficients complexes, unitaire et de degré  $n$ .

1. Calculer  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$ .
2. Démontrer qu'il existe un complexe  $z$  de module 1 tel que  $|P(z)| \geq 1$ .
3. Soit  $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ . Démontrer qu'il existe un complexe  $z$  de module 2 tel que :

$$\prod_{k=1}^n |z - z_k| \geq 2^n.$$

Analyse

**36** ANALYSE.

On considère la suite  $(a_n)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \int_0^1 \left( \frac{1+t^2}{2} \right)^n dt.$$

1. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{2}{n+1}$ .
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^n$ , et calculer sa somme dans le cas où  $x < 0$ .

**37** Analyse.

On pose  $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt$ .

1. Démontrer que  $I$  est bien définie.
2. Démontrer que  $\int_{\epsilon}^{2\epsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} I$
3. Calculer  $I$ .

**38** Analyse.

Soit  $x$  un réel strictement positif.

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :

$$u_n = \frac{n!}{x^n} \prod_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{x}{k} \right).$$

1. Déterminer la nature de la série de terme général  $\ln(u_n) - \ln(u_{n-1})$ . En déduire que  $(u_n)$  converge, et déterminer sa limite.
2. Déterminer un réel  $\alpha$  tel que la série de terme général  $\ln(u_n) - \ln(u_{n-1}) - \alpha \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$  converge.
3. Etudier la nature de la série de terme général  $u_n$ .

**39** Analyse.

On pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ , et  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ .

Donner le rayon de convergence de cette série entière, puis calculer sa somme.

**40** Analyse.

Soit  $S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{xt} - 1} dt$

1. Donner l'ensemble de définition de  $S$ , et montrer que la fonction  $S$  est continue sur son ensemble de définition.
2. Ecrire  $S(x)$  comme la somme d'une série de fonctions rationnelles.
3. Donner un équivalent de  $S(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

Probabilités

**41** **PROBABILITES.**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$  de même loi admettant un moment d'ordre 2. On suppose que  $X + Y + 1$  suit une loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ .

1. Déterminer l'espérance et la variance de  $X$ .
2. Calculer la fonction génératrice de  $X$ .
3. En déduire la loi de  $X$ .

**42** **PROBABILITES.**

Soit un espace probabilisé  $(\Omega, T, P)$  et  $A$  et  $B$  deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi géométrique de paramètre  $p$ .

Déterminer la probabilité que toutes les solutions de l'équation différentielle :

$$(E_\omega) : y'' + (A(\omega) - 1)y' + B(\omega)y = 0$$

tendent vers 0 en  $+\infty$ .

**43** **PROBABILITES.**

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes,  $X_n$  suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p_n$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} (p_1 + \dots + p_n) = p$ .

Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$ .

**44** **Probabilités.**

On considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires mutuellement indépendantes toutes de même loi, chacune suivant la loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . On pose  $q = 1 - p$ . On note, pour tout entier naturel  $n$  non nul et tout  $\omega \in \Omega$ ,  $I_n(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$  et  $M_n = \max(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ .

1. Déterminer la loi de  $I_n$ , puis l'espérance de  $I_n$ .
2. Déterminer la loi de  $M_n$ . Montrer que  $M_n$  est d'espérance finie et  $E(M_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{n}{i} \frac{1}{1 - q^i}$ .

## V X-ESCPI (50 minutes sans préparation)

Algèbre

**45** **ALGEBRE.**

Soit  $f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$ . Spectre de  $f$ ? Diagonalisabilité sur  $\mathbb{R}$  ? Sur  $\mathbb{C}$  ?

**46** **ALGEBRE.**

Trouver toutes les matrices  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  telles que :  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**47** **ALGEBRE.**

1. Soit  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . Démontrer que  $AB$  est diagonalisable, et que ses valeurs propres sont positives.
2. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices symétriques positives. Démontrer que  $\det(A + B) \geq \max(\det(A), \det(B))$ .

Analyse

**48 ANALYSE.**

1. Démontrer que la fonction cos admet un unique point fixe dans  $\mathbb{R}$ .
2. Démontrer qu'il n'existe aucune fonction dérivable  $f$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f \circ f = \cos$

**49 ANALYSE.**

Existence et calcul de :

$$\int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt dx.$$

**50 ANALYSE.**

Soit  $(u_n)$  une suite décroissante telle que  $\sum u_n$  converge.

Soit  $v_n = n(u_n - u_{n+1})$ . Démontrer que la série  $\sum v_n$  converge, et que  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$

**51 ANALYSE.**

Trouver les fonctions continues de  $[0, 1]$  vers  $\mathbb{R}_+^*$  telles que  $\int_0^1 f = \int_0^1 \frac{1}{f} = 1$ .

**52 ANALYSE.**

On pose  $S_n = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{pq}{p+q}$ .

Donner un équivalent de  $S_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$

Probabilités

**53 PROBABILITES.**

1. Montrer :  $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) \leq e^{\frac{x^2}{2}}$ .
2. On considère une suite de variables aléatoires  $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$  IID suivant des lois  $\mathcal{U}(\{-1, 1\})$ . On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Montrer que, pour  $\lambda > 0$ ,  $P(S_n \geq \lambda) \leq e^{-\frac{\lambda^2}{2n}}$ .

**54 PROBABILITES.**

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite croissante d'entiers naturels non nuls. On tire des dés équilibrés, le  $n$ -ième dé admettant  $a_n$  faces numérotées de 1 à  $a_n$ . On effectue les tirages tant que la suite des résultats est croissante. On note  $p$  la probabilité de faire une infinité de tirages. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  pour que  $p$  soit non nul.

**55 PROBABILITES.**

Une personne se déplace aléatoirement sur  $n$  emplacements numérotés de 1 à  $n$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $\mu_{0,i}$  la probabilité que la personne soit à l'emplacement  $i$  à l'instant 0.

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $X_k$  la variable aléatoire égale au numéro de l'emplacement où se trouve la personne à l'instant  $k$ .

Pour  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , on note  $p_{i,j}$  la probabilité que la personne passe de l'emplacement  $i$  à l'emplacement  $j$  à un instant donné, **qui ne dépend pas de l'instant considéré**.

1. Donner les lois de  $X_1$  et  $X_2$ .
2. Soit  $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \mathbb{R}$ . Calculer  $E(f(X_1))$ .
3. Pour  $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \mathbb{R}$  et  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , On note  $T_f(i) = E(f(X_1))$ , **calculé en supposant que  $\mu_{0,i} = 1$** .  
On dira que le chemin est déterministe si pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe  $x_i$  tel que  $p_{i,x_i} = 1$ .  
Démontrer que le chemin est déterministe si et seulement si :  
pour tout  $(f, g)$ ,  $T_{fg} = T_f T_g$