

Préparation à l'oral

Polycopié 1 - Indications

1 Exercice 1 :

Q1 : Calculer la norme infinie de u_n sur \mathbb{R} .

Q2 : Calculer $T_n(x)$ en utilisant une somme complexe géométrique.

Q3 : Ecrire la somme partiel de la série, faites apparaître la variation de $T_n(x)$ puis utiliser une transformation d'Abel.

Exercice 2 : Recherche de CN : Justifier que les sous-espaces propres de A sont stables par M . Diagonaliser A et en déduire une diagonalisation de M .

2

Questions de cours : Espaces vectoriels normés.

Critère de continuité d'une application linéaire d'un espace vectoriel normé dans un autre.

Comment montrer qu'une partie est un ouvert, un fermé.

Q1 : Utiliser la caractérisation séquentielle d'un fermé. On peut montrer aussi la réciproque de la question (moins facile).

Q3 : Montrer que q est borné.

Q4 : Utiliser la question 1, montrer que ϕ est continue.

3

Questions de cours : Critère de diagonalisabilité d'une matrice.

Méthodes possibles pour calculer les éléments propres d'une matrice.

Q3 : Préciser la forme factorisée du polynôme caractéristique en utilisant le rang de la matrice.

Utiliser la trace de la matrice et de son carré.

Q4 : Comparer les ordres dans le polynômes caractéristique ("ordre algébrique") et les dimensions des sous-espaces caractéristiques ("ordre géométrique").

4

Q3 : Comparer les fonctions à l'ordre n et à l'ordre $n + 1$ pour obtenir la monotonie de la suite.

Pour obtenir la limite : raisonner par CN en utilisant la relation suivie par la suite.

Q5, Q6 : Injecter l'écriture asymptotique connue sur u_n dans la relation, et obtenir une écriture asymptotique plus précise.

5

Questions de cours :

Formule de Stirling.

Sommes de Riemann.

Comparaison série-intégrale, manipulation des équivalents et écritures asymptotiques.

Q5 : Faire apparaître une somme de Riemann.

Utiliser une comparaison série-intégrale ou utiliser la formule de Stirling.

8

Questions de cours :

Définition d'un ouvert, d'un fermé.

Caractérisation séquentielle des fermés.

Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une fonction continue.

1. Utiliser la définition d'un ouvert.

Faire éventuellement une figure .

2. Utiliser la caractérisation séquentielle des fermés.

Trouver un contre-exemple.

Trouver ainsi la somme d'une suite d'éléments de A et d'une suite d'éléments de B qui ne converge pas vers un élément de $A+B$.

9

Questions de cours :

Expression de la trace d'une matrice en fonction de ses valeurs propres.
Rayon de convergence d'une somme de SE.

Exprimer les coefficients de la SE en fonction des valeurs propres de la matrice A .
Ecrire la SE comme une somme de n SE et évaluer leur rayon.

10

Questions de cours :

Réduction (matrices orthogonales, expression de la trace d'une matrice en fonction de ses valeurs propres...).

Exprimer la trace en fonction des valeurs propres de la matrice A .

Traiter des cas particulier : A inversible, A symétrique.

Chercher des CN sur les valeurs propres (en utilisant un vecteur propre, en transposant, conjuguant, de façon similaire à ce qui a été fait pour les matrices orthogonales et pour les matrices symétriques).

Autre solution : utiliser $A^T A$ (symétrique, même noyau que A).

13

Questions de cours :

Théorème des bornes atteintes sur un fermé borné en dimension finie.

CN d'ordre 1 pour les extrema locaux sur un ouvert.

CN et CS d'ordre 2 pour les extrema locaux sur un ouvert.

Pour commencer : on écrit le théorème des bornes atteintes sur un fermé borné, on étudie les points critiques sur l'intérieur (ouvert), on étudie les variations de f sur la frontière.

Ensuite : on identifie les extrema globaux sur D , puis sur son intérieur.

Enfin, on examine s'il peut y avoir d'autres extrema locaux.

14

Questions de cours : Séries de fonctions :

Types de convergence d'une série de fonctions,
théorème sur les sommes de séries de fonctions (continuité, dérivations, double limite,
interversion entre intégrale et somme).

Q1 : Comparaison des séries à termes positifs. Théorème de continuité pour les sommes de séries.

Q2 : Théorème de la double limite.

Q3 : Démonstration de la limite en utilisant la monotonie de la somme.

Pour l'équivalent, une comparaison série-intégrale est possible.

Question possible : Y-a-t-il convergence uniforme de la série ?

15

Questions de cours : Somme d'une série de fonctions : théorème de continuité,
Intégrale à paramètre (continu) : théorème d'intégration terme à terme.

Q1 : Considérer une autre solution éventuelle g , et examiner les propriétés de la différence $g - f$.

Q1 Q2 : Itérer la relation pour écrire f comme somme d'une série de fonctions. Montrer la convergence uniforme pour utiliser le théorème de continuité.

Q3 : utiliser le théorème d'intégration terme à terme.

Question supplémentaire : f est-elle intégrable en 0 ?

16

Pour la limite, utiliser le théorème des accroissements finis.

20

Questions de cours : Intégrales dont les bornes dépendent d'un paramètre, théorèmes de continuité et d'intégration

Pour montrer qu'une fonction du noyau est nulle :

Exprimer la dérivée de $\phi(f)$ en fonction de f .

Penser à itérer la relation dont vous disposer n fois puis à prendre une limite quand n tend vers $+\infty$.

21

Questions de cours : Intégrales à paramètre (entier) :

Théorème de convergence dominée et d'intégration terme à terme.

Q1 : Raisonner par comparaison.

Q2 : Théorème de convergence dominée, ou bien majoration de l'intégrande.

Q3 : DSE de $\frac{1}{1-x}$, Théorème d'intégration terme à terme.

22

Questions de cours : Séries de fonctions :

Types de convergence d'une série de fonctions,
théorème de continuité,
convergence d'une série télescopique et de la suite associée.

Q1 : Utiliser le théorème des accroissements finis.

Prouver la convergence normale pour utiliser le théorème de continuité.

La monotonie est directe par monotonie de chaque terme, sans théorème de dérivation.

Q2 : Trouver une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$.
Etudier la convergence de la série télescopique $\sum S(n+1) - S(n)$

27

Questions de cours : Formules de Pascal (même si ce n'est pas une bonne méthode de l'utiliser),
Critère de d'Alembert pour les séries numériques,
Méthode de Raabe-Duhamel,
Continuité de la somme d'une série entière, étude de la limite aux bornes de l'ensemble de définition.

Q1 : Utiliser le critère de d'Alembert pour déterminer le rayon de convergence.

Pour la convergence en 1 : penser à la méthode de Raabe-Duhamel.

Pour le calcul de la somme sur le disque ouvert de convergence : utiliser la relation de récurrence sur la suite des coefficients et trouver une équation différentielle vérifiée par la somme.

Pour la valeur en -1 : montrer la continuité en -1 - convergence uniforme par majoration du reste.

Q2 : C'est un dénombrement : en posant $y_k = x_k + 1$, on se ramène à $y_0 + \dots + y_n = 2n + 1$, donc on se ramène à écrire une somme de 1s qui vaut $2n + 1$.

La question est donc comment ces 1s se répartissent pour former les entiers de la somme.

30

Questions de cours : Formules de probabilités (probabilités composées, probabilités totales, théorème du transfert).
Sommes de références (y-compris le DSE de $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^p}$).

Q4 : On pourrait procéder directement, par des calculs de SE. Il est plus efficace d'utiliser la relation du 3 et la formule de Koëning-Hughens pour la variance.

31

Pour montrer qu'une matrice qui commute avec A est un polynôme de A :

Avec la nilpotence de A : utiliser une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associée à A est simple

(matrice avec une diagonale décalée de 1).

Définir de façon nécessaire le polynôme qui conviendra et montrer qu'il convient sur tous les vecteurs de la base.

32

Questions de cours : Espérance, variance, la fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires.
DSE de la fonction génératrice.

Ecrire la trace d'une matrice en fonction de ses valeurs propres.

Avec un polynôme annulateur de A , écrire une CN sur les valeurs propres de A .

36

Questions de cours : Intégrales à paramètres.

Q1 : utiliser des inégalités sur la fonction intégrée.

Q3 : Utiliser le théorème d'intégration terme à terme pour intervertir la somme et l'intégrée.

41

Questions de cours : Espérance, variance, la fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires.
DSE de la fonction génératrice.

45

Ecrire la matrice de f dans la base canonique.

Au choix :

Calculer son polynôme caractéristique / Chercher les valeurs propres et vecteurs propres en résolvant $AX = \lambda X$. / Examiner les puissances de la matrice et trouver un polynôme annulateur.

46

Déterminer le polynôme caractéristique de A (utiliser la triangularisation).

Utiliser que les sous-espaces propres de A^n sont stables par A .

Pour trouver le coefficient manquant, écrire les puissances successives de A et des relations de récurrences entre leurs coefficients.

47

Questions de cours : Matrices symétriques positives, caractérisation spectrale.

1. Traiter le cas particulier où A et B commutent.

Dans le cas général : trouver un produit scalaire construit avec B pour lequel AB , ou plutôt son endomorphisme canoniquement associée, est auto-adjointe.

Utiliser la caractérisation spectrale des endomorphismes autoadjoints positifs.

2. Traiter le cas particulier où les matrices sont non inversibles.

Dans le cas où l'une des matrices est inversible : utiliser son inverse et les propriétés du déterminant d'un produit pour se ramener au cas de la question 1.

48

1. Faire une étude de fonction et utiliser le théorème de la bijection.
2. Dériver la relation et utiliser le point fixe de la question précédente.
Raisonner sur les signes pour aboutir à une contradiction.

49 A x fixé, montrer que l'intégrale intérieure converge (IPP, comparaison).

Pour l'intégrale extérieure, faire une IPP.

Utiliser la dérivée de la fonction définie par l'intégrale intérieure.

Pour démontrer la limite d'une intégrale à paramètre, penser à un changement de variable pour la modifier, au théorème de CD.

50 Faire une transformation d'Abel sur les sommes partielles.

Exprimer u_n comme une somme de ses variations, pour l'exprimer avec une somme en fonction des v_k .

Utiliser la décroissance de la suite pour obtenir des inégalités.

51 Utiliser Cauchy-Schwarz et le cas d'égalité.

52 Utiliser le théorème de sommation par paquets pour modifier l'écriture de la somme.

53

Questions de cours : Probabilités:

Inégalités de Markov, Bienaymé-Tchebichev, loi faible des grands nombres.
théorème du transfert.

Q1 : Utiliser le DSE des 2 fonctions.

Q2 : Modifier d'abord l'événement avec une fonction exponentielle, puis appliquer l'inégalité de Markov.

On calcule l'espérance avec le théorème du transfert.

54 Ecrire la probabilité cherchée comme une limite de probabilités.

Chercher à minorer, majorer ces probabilités pour passer les inégalités à la limite.

Pour minorer une probabilité $P(A)$, on peut utiliser un événement inclus dans A dont on sait calculer la probabilité.

Pour majorer la probabilité d'une intersection, on peut essayer de la comparer au produit des probabilités.

Investiguer les probabilités que l'on sait calculer pour les faire apparaître.