15 (1) (Recherche de CN) :

Met 1 Supposons que $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ vérifie $\begin{cases} \lim\limits_{0} g = 0 \\ \forall x > 0,\ g(x+1) + g(x) = \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$

$\forall x > 0, \quad (g-f)(x+1) + (g-f)(x) = 0$

$(g-f)(x+2) = (g-f)(x)$. $g-f$ est 2-périodique.

$\lim\limits_{+\infty} (g-f) = 0$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} (g-f)(x_0 + 2n) = 0 = (g-f)(x_0)$ $\quad g - f = 0$ $\quad$ f est unique

Met 2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - f(x+1)$

$= \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2} + f(x+2)$

$= \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(x+k)^2} + \underbrace{f(x+n+1) \times (-1)^{n+1}}_{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \overbrace{\dfrac{(-1)^k}{(x+k)^2}}^{f_k(x)}$ $\quad$ f est unique

---

(2) f_k est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\|f_k\|_\infty^{[a,+\infty[} = \dfrac{1}{(a+k)^2} \sim \dfrac{1}{k^2}$ donc $\sum f_k$ CN sur $[a,+\infty[$ (CU)

Théo. de continuité $\to$ f est continue sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$

sur $\mathbb{R}_+^*$

(3) $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ (CS)}} S_n$, avec $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$

S_n est cpm sur $[1, +\infty[$, f est cpm sur $[1, +\infty[$,

Critère spécial des SA (...) $|S_n(x)| \leqslant f_0(x) = \frac{1}{x^2}$, f_0 intégrable sur $[1, +\infty[$

Th. de Conv. dominée : f est intégrable sur $[1, +\infty[$

$$\left(\text{et } \int_1^{+\infty} f = \lim_{n \to +\infty} \int_1^{+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_1^{+\infty} f_n . \right)$$

• Rq : Recherche de CS :

Posons $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, en posant $f_n : x \longmapsto \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$

f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf. Q2)

Montrons $\lim_{+\infty} f = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$, $\sum f_n$ CN sur $[1, +\infty[$,

Théo de la double limite $\rightarrow$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} 0 = 0$

f convient !

• Rq. : Comportement en 0^+ :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \underbrace{f(x+1)}_{\to f(1)} \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et f n'est pas intégrable sur $]0, 1]$

$\boxed{16}$ $g : t \longmapsto \dfrac{1}{t - \ln t} = \dfrac{1}{\alpha(t)}$, $\alpha(t) = t - \ln t$

- g est continue sur $D_g = \mathbb{R}_+^*$. $D_f = \mathbb{R}_+^*$.
- $f(x) = G(2x) - G(x)$, avec G une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{\ln 2 - \ln x}{(2x - \ln 2x)(x - \ln x)} = \frac{\ln 2 - \ln x}{\alpha(2x)\alpha(x)}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & & 2 & & +\infty \\ \hline f(x) & & \nearrow & f(2) & \searrow & \end{array}$$

- $\boxed{\text{Met } 1 :}$

Inégalités : $\ln t \leq t - 1$, $t - \ln t \geq 1$, $0 < g(t) \leq 1$, $0 \leq f(x) \leq x$

$$\boxed{\lim_{0^+} f = 0}$$

- $$\begin{array}{c|ccccc} t & x & 2x & 1 & x & 2x \\ \hline \alpha(t) & & \searrow & 1 & \nearrow & \end{array}$$

$x \geq 1 \Rightarrow \forall t \in [x, 2x]$.

$$x - \ln x \leq t - \ln t \leq 2x - \ln 2x$$

$$\frac{1}{2x - \ln 2x} \leq g(t) \leq \frac{1}{x - \ln x}$$

$$\underbrace{\frac{x}{2x - \ln 2x}}_{\to 1/2} \leq f(x) \leq \underbrace{\frac{x}{x - \ln x}}_{\to 1} \qquad \text{inabouti}$$

En $+\infty$:

- $x \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2x - \ln 2x \leq t - \ln t \leq x - \ln x$

$$\forall t \in [x, 2x], \quad \frac{1}{x - \ln x} \leq g(t) \leq \frac{1}{2x - \ln 2x}$$

$$\frac{x}{x - \ln x} \leq f(x) \leq \frac{x}{2x - \ln 2x}$$

$$\sim -\frac{x}{\ln x} \qquad \sim -\frac{x}{\ln x}$$

$$\boxed{f(x) \underset{0^+}{\sim} -\frac{x}{\ln x}}$$

En 0^+ :

Pour $x \geq 1$: suffisamment grand : $0 < x - \ln(2x) \leq t - \ln 2x \leq t - \ln t \leq t - \ln x$

$$0 < \frac{1}{t - \ln x} \leq g(t) \leq \frac{1}{t - \ln 2x}$$

$$\underbrace{\ln\left(\frac{2x - \ln x}{x - \ln x}\right)}_{\to \ln 2} \leq f(x) \leq \underbrace{\ln\left(\frac{2x - \ln 2x}{x - \ln 2x}\right)}_{\to \ln 2} \qquad \boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln 2}$$

$\boxed{\text{Met } 2}$ $\quad f(x) = \displaystyle\int_1^2 \underbrace{\frac{x\,du}{xu - \ln(xu)}}_{f(x,u)}$

$t = xu$

- $\underline{\text{En } +\infty :}$ $\forall u,\ f(x,u) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \dfrac{1}{u}$

$\forall u,\ \forall x \geq 1, \quad xu - \ln(xu) \geq x - \ln(2x) > 0 \qquad \left(\ln(2x) \leq \ln 2 + x - 1 \leq x\right)$

$$\frac{x}{xu - \ln(xu)} = |f(x,u)| \leq \frac{x}{x - \ln(2x)} = \alpha(x)$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 1$ (...) $\underline{\text{donc}}$ α est bornée sur $[1, +\infty[$

$$|f(x,u)| \leq \|\alpha\|_\infty^{[1,+\infty[}, \text{ intégrable sur } [1, +\infty[.$$

TCD : $\boxed{f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \displaystyle\int_1^2 \frac{du}{u} = \ln 2}$

- $\underline{\text{En } 0^+ :}$ $\quad \forall u, \quad f(x,u) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \qquad \Big|\ \xrightarrow{\text{TCD}} f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} \displaystyle\int_1^2 0 = 0$

$\forall u,\ \forall x \leq 1, \quad |f(x,u)| = \dfrac{x}{xu - \ln(xu)} \leq x \leq 1$

- $\underline{\text{En } 0^+ :}$ $\quad \forall u, \quad f(x,u) \underset{x \to 0^+}{\sim} -\dfrac{x}{\ln x}$

$$-\frac{\ln x}{x} f(x,u) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$$

$\forall u,\ \forall x > 0, \quad \left|-\dfrac{\ln x}{x} f(x,u)\right| = \dfrac{-\ln x}{xu - \ln(xu)} \leq -\dfrac{\ln x}{x - \ln(2x)} = \beta(x)$

$\beta(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{-\ln x}{-\ln x} = 1$, $\quad \beta$ est bornée sur $]0, 1]$.

$$\left|-\frac{\ln x}{x} f(x,u)\right| \leq \|\beta\|_\infty^{]0,1]}, \text{ intégrable sur } [1, 2].$$

TCD : $-\dfrac{\ln x}{x} f(x) = \displaystyle\int_1^2 -\frac{\ln x}{x} f(x,u)\,du \xrightarrow[x \to 0^+]{} \int_1^2 1\,du = 1.$

$\boxed{f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} -\dfrac{x}{\ln x}}$

21 (1) $f_n(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x^{2n+1}\ln(x)$ $\quad f_n(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$

$$f_n(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln(x)}{(x-1)(x+1)} \sim \frac{\ln x}{2(x-1)} \qquad f_n(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \frac{1}{2}$$

f_n est prolongeable par continuité sur $[0,1]$.

---

(2) • $I_n = \int_0^1 x^{2n+1} \times \frac{\ln x}{x-1} \times \frac{1}{x+1}\,dx \leqslant \int_0^1 -\ln x \times x^{2n+1} \underset{\text{IPP (...)}}{=} \frac{1}{(2n+2)^2}$

$\boxed{I_n \longrightarrow 0}$

• Met 2 : $|f_n(x)| \leqslant \frac{-\ln x}{x-1}$ intégrable sur $]0,1[$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Theo. de Convergence Dominée $\rightarrow$ $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

---

(3) $\forall x \in]0,1[$, $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (x^2)^k$

$$I_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\left(-x^{2n+1}\ln x \times x^{2k}\right)}_{g_n(x)}$$

g_n est intégrable sur $]0,1[$, $\sum g_n = f_n$ est cpm sur $]0,1[$

$$\int_0^1 |g_n| = -\int_0^1 x^{2n+1+2k}\ln x\,dx = -\left[\ln x \times \frac{x^{2n+2k+2}}{2n+2k+2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{x} \times \frac{x^{2n+2k+2}}{2n+2k+2}\,dx$$

(le crochet converge)

$$= +\frac{1}{(2n+2k+2)^2} \sim +\frac{1}{4k^2}$$

$\sum \int_0^1 |g_n|$ Converge.

Theo. d'intégration terme à terme
$\downarrow$

$$I_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n+2k+1}\ln x\,dx =$$

$$\underset{\text{IPP (...)}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+2k+2)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+k+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

[22] 29

Met 2 : Rq : $S(x+1) - S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \text{th}(x+n+1) - \text{th}(n+x) = 1 - \text{th}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} 2e^{-2x}$

$\sum S(n+1) - S(n)$ converge, donc $(S(n))$ converge.

$\lim_{n \to +\infty} S(n) = \lim_{x \to +\infty} S(x) = S(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} S(n+1) - S(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - \text{th}(n))$

22 (1) Met 1: • $f_n(x) = \dfrac{e^{x+n} - e^{-x-n}}{e^{x+n} + e^{-x-n}} - \dfrac{e^{n}-e^{-n}}{e^{n}+e^{-n}}$

$$= \frac{2e^{x} + 2e^{-x}}{(e^{n}+e^{-n})(e^{x+n}+e^{-x-n})} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2e^{x}+2e^{-x}}{e^{2n}}$$

$\sum f_n(x)$ Converge. S est définie sur $\mathbb{R}_+$

• f_n est $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} th(x) = 1$

$$\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+} = 1 - th(n) = 1 - \frac{e^{n}-e^{-n}}{e^{n}+e^{-n}} = \frac{2e^{-n}}{e^{n}+e^{-n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2e^{-2n}$$

$\sum f_n$ $\underset{(CU)}{CN}$ sur $\mathbb{R}_+$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$

Theo. de Continuité $\to$ S est continue sur $\mathbb{R}_+$

Met 2: • $f_n(x) = th'(c_{n,x}) = \dfrac{1}{ch^2(c_{n,x})}$ avec $n \leq c_{n,x} \leq n+x$.

$c_{n,x} \underset{n \to +\infty}{\sim} n$

$$\leq \frac{1}{ch^2(n)}$$

$\dfrac{1}{ch^2(n)} \sim \dfrac{4}{e^{2n}}$ donc $\sum f_n(x)$ converge

• $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+} \leq \dfrac{1}{ch^2(n)}$ $\qquad \sum f_n$ CN sur $\mathbb{R}_+$ ...

• S est $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$ (somme d'une série de f° strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$)

(2) Met 1 $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 1 - th(n)$. $\quad \sum f_n$ CU sur $\mathbb{R}_+$

Theo de la double limite $\to$ $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (1 - th(n))$.

$\boxed{27}$ ① Posons $a_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$

- $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(2n+1)(2n+2)}{4 \times (n+1)^2} = \dfrac{2n+1}{2(n+1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Règle de d'Alembert $\longrightarrow$ Rayon de Convergence $R = 1$

- Met 1 : Formule de Stirling : $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \times \sqrt{2\pi n}$

$(2n)! \sim \left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n} \times 2\sqrt{\pi n}$

$a_n \sim \dfrac{1}{4^n} \times \dfrac{(2n)^{2n}}{e^{2n}} \times 2\sqrt{\pi n} \times \left(\dfrac{e}{n}\right)^{2n} \times \dfrac{1}{2\pi n} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$

Met 2 Raabe-Duhamel.

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1 + \frac{1}{2n}}{1 + \frac{1}{n}} = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)\left(1 - \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = 1 - \dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Posons $v_n = \ln(n^\alpha a_n)$

$v_{n+1} - v_n = \alpha \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \left(\alpha - \dfrac{1}{2}\right) \times \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $v_n = \ln(\sqrt{n}\, a_n)$. $v_{n+1} - v_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

$\sum v_{n+1} - v_n$ Converge. (v_n) Converge

$\sqrt{n}\, a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} C > 0$ $\quad a_n \sim \dfrac{C}{\sqrt{n}}$

- $\sum a_n$ diverge. $f = x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ n'est pas défini en 1

- $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} < 1$, $a_n \geq 0$, $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $\left(a_n \sim \dfrac{C}{\sqrt{n}}\right)$

Critère Spécial des SA $\rightarrow$ $\sum (-1)^n a_n$ Converge. f est déf. en -1

$\mathcal{D}_f = [-1, 1[$

- Calcul de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-1,1[$:

Met 1 : f est C^∞ sur $]-1,1[$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$
$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$(2n+2) a_{n+1} = (2n+1) a_n.$$

$$2(n+1) a_{n+1} = 2n a_n + a_n$$

$$2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$2f'(x) = 2x f'(x) + f(x)$$

f est solution sur $]-1,1[$ de (E) : $y' = \dfrac{y}{2(1-x)}$

$$f : x \longmapsto \lambda \times e^{-\frac{1}{2}\ln(1-x)} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-x}}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$f(0) = a_0 = 1$ donc $\lambda = 1$. $\quad \boxed{f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}}$

Met 2

$$a_n = \frac{(2n)!}{4^n \times n!^2} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k) \times \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{4^n n!^2}$$
$$= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{2^n n!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)}{n!}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)}{n!} x^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right)}{n!}}_{\text{qu'on peut noter } \binom{-\frac{1}{2}}{n}} (-x)^n = (1+(-x))^{-\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x}}}$$

- Calcul de $f(x)$ en $x = -1$:

Pour $x \in [-1, 0]$: $|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n x^n\right| \leq a_{n+1}|x|^{n+1} \leq a_{n+1}$

$\|R_n\|_\infty^{[-1,0]} \leq a_{n+1} \left(\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\right)$

$\sum u_n$ CU sur $[-1, 0]$, u_n est continue sur $[-1, 0]$ $(u_n : x \mapsto a_n x^n)$

Theo. de Continuité $\rightarrow$ f est Continue sur $[-1, 0]$.

$$f(-1) = \lim_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim_{x \to (-1)^+} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\forall x \in D_f =]-1, 1], \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.}$$

---

② Posons $F = \left\{(x_0, \dots x_n) \in \mathbb{N}^2, \sum_{k=0}^{n} x_k = n\right\}$

$F' = \left\{(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{N}^{*2}, \sum_{k=0}^{n} y_k = 2n+1\right\}$ (en posant $y_k = x_k + 1$)

$|F| = |F'|$

$$\underbrace{1 + \dots + 1}_{y_0 \text{ fois}} \oplus \Big|_{i_1} \dots \oplus \Big|_{i_n} \underbrace{1 + \dots + 1}_{y_n \text{ fois}} = 2n+1$$

Choisir un élément de F' revient à choisir n emplacements pour les $\oplus$ séparant les entiers y_k parmi les $2n$ signes $+$ de la somme des 1.

$\rightarrow \binom{2n}{n}$ possibilités

$$\boxed{p_n = \text{card}(F') = \binom{2n}{n}}$$

Rq : Posons $G = \left\{\{i_1; \dots; i_n\}, (i_1, \dots, i_n) \in [\![1, 2n]\!]^n\right\} = \mathcal{P}_n([\![1, 2n]\!])$

$\varphi : G \longrightarrow F'$ est une bijection

$\{i_1; \dots; i_n\} \longmapsto (y_0, \dots y_n)$ avec $y_0 = i_1$
$i_1 < \dots < i_n$

$y_1 = i_2 - i_1$

$\vdots$

$y_k = i_{k+1} - i_k$

$\vdots$

$y_{n-1} = i_n - i_{n-1}$

$y_n = 2n + 1 - i_n$.

$\text{card}(F') = \text{card}(G) = \binom{2n}{n}$

$\boxed{30}$ ① $N \sim \mathcal{G}(p)$.

$(N,X)(\Omega) = \{(j,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq j\}$

Pour $(j,k) \in (N,X)(\Omega)$: $\mathbb{P}(N=j, X=k) = \binom{j}{k} p^{k+1} (1-p)^{2j-k-1}$.

Loi de X sachant $(N=j)$: $\mathcal{B}(j,p)$

② $X(\Omega) = \mathbb{N}$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}(X=k) = \sum_{j=k}^{+\infty} \binom{j}{k} p^{k+1} (1-p)^{2j-k-1}$

$$= \sum_{j=k}^{+\infty} \binom{j}{k} \left((1-p)^2\right)^{j-k} \times p^{k+1} \times (1-p)^{k-1}$$

$$\underset{(\dots)}{=} \left(\frac{1}{1-(1-p)^2}\right)^{k+1} \times p^{k+1} \times (1-p)^{k-1} = \left(\frac{1-p}{2-p}\right)^{k-1} \times \frac{1}{(2-p)^2}.$$

$\mathbb{P}(X=0) = \sum_{j=1}^{+\infty} p\,(1-p)^{2j-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} p\,(1-p)^{2j+1} = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}$.

③ • $U(\Omega) = \{0;1\}$, $V(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $UV(\Omega) = \mathbb{N}$.

$\mathbb{P}(UV=0) = \mathbb{P}(U=0) = 1-\lambda$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}(VU=k) = \mathbb{P}(U=1) \times \mathbb{P}(V=k)$

$$= (1-\lambda)^{k-1} \times \lambda^2.$$

Pour $\lambda = \frac{1}{2-p}$; $1-\lambda = \frac{1-p}{2-p}$. $VU \sim X$.

④ • $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}(U) \times \mathbb{E}(V) = \lambda \times \frac{1}{\lambda} = 1$.

• $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(UV^2) = \mathbb{E}(U) \times \mathbb{E}(V^2) = \lambda(1-\lambda) \times \left(\frac{1-\lambda}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\right) = \frac{(1-\lambda)(2-\lambda)}{\lambda}$

• $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

$$= \frac{(1-p)(3-2p)}{2-p} - 1. \qquad = \frac{(1-p)(3-2p)}{2-p}$$

$\boxed{41}$ $X \perp\!\!\!\perp Y$, $X \sim Y$, $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$

$X+Y+1 \sim \mathcal{G}(p)$

① • $\mathbb{E}(X+Y+1) = \frac{1}{p} = 2\,\mathbb{E}(X)+1$, $\quad \boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-1\right).}$

• $V(X+Y+1) = V(X+Y) = 2V(X)$ (car $X \perp\!\!\!\perp Y$)

$= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$

$\boxed{V(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}\right)}$

---

② Pour $t \in [-1,1]$:

$G_{X+Y+1}(t) \underset{(\dots)}{=} \frac{pt}{1-t(1-p)} = \mathbb{E}\left(t^{X+Y+1}\right)$

$= t \times G_X(t)^2$

Si $t \in [-1,1] \setminus \{0\}$, $G_X(t) = \sqrt{\frac{p}{1-t(1-p)}}$.

De plus, G_X est continue en 0 donc $G_X(0) = \lim_{t \to 0} G_X(t) = \sqrt{p}$.

Ainsi : $\boxed{\forall t \in [-1,1],\ G_X(t) = \sqrt{\frac{p}{1-t(1-p)}}}$

---

③ $G_X(t) = (1-qt)^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt{p}$

$= \sqrt{p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right)}{n!}(-qt)^n$

$= \sqrt{p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n!} \times \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) \times (qt)^n$

$= \sqrt{p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} \frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} \times q^n t^n = \sqrt{p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^n}{2^{2n}} \times \binom{2n}{n} t^n.$

Ainsi : par unicité du DSE :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_n = n) = \sqrt{p} \times \frac{q^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}}$