$\boxed{1}$ $\boxed{Ex 1}$ ① $\|u_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = a_n \; (a_n \geq 0)$ $\quad \boxed{\sum u_n \text{ CN} \Leftrightarrow \sum |a_n| \text{ converge}}$

② (. $T_n(x) = \mathrm{Im}(Z_n(x))$

$$Z_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \qquad (e^{ix} \neq 1 \text{ car } x \not\equiv 0 [2\pi])$$

$$= \frac{e^{i(\frac{n}{2}+1)x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \times \frac{e^{-i\frac{n}{2}x} - e^{i\frac{n}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}}$$

$$= e^{i(\frac{n+1}{2})x} \times \frac{\sin(\frac{n}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\boxed{T_n(x) = \frac{\sin(\frac{n}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}} \times \sin\left(\frac{n+1}{2}\right)x} \qquad \boxed{|T_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} = M_x}$$

③ • Pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \sin(nx) = 0$ $\quad$ $\sum a_n u_n(x)$ converge.

• Prenons $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$:

Pour $N \in \mathbb{N}^*$: posons $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x)$.

(Transformation d'Abel) :

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n (T_n(x) - T_{n-1}(x)) \quad \downarrow n' = n-1$$

$$= \sum_{n=1}^{N} a_n T_n(x) - \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} T_n(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) T_n(x) + a_N T_N(x)$$

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|(a_n - a_{n+1}) T_n(x)| \leq M_x (a_n - a_{n+1})$

(a_n) converge, donc $\sum (a_n - a_{n+1})$ converge,

donc, par comparaison de séries à TP, $\sum (a_n - a_{n+1}) T_n(x)$ est AC donc converge

$a_N T_N(x) \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$,

donc $(S_N(x))_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge.

$\boxed{\sum u_n \text{ CS sur } \mathbb{R}}$

Ex 2 Recherche de CN : Supposons $M^2 = A$, avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- $MA = M^3 = AM$.
  Les sous-espaces propres de A, $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I)$, $E_3 = \mathrm{Ker}(A - 3I)$, $E_{-4} = \mathrm{Ker}(A + 4I)$
  sont stables par M.
- A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ (3 vp. distinctes)
  Disposons de $U_1 \in E_1 \setminus \{0\}$, $U_2 \in E_2 \setminus \{0\}$, $U_3 \in E_3 \setminus \{0\}$.
  Posons $P = (U_1 | U_2 | U_3) \in GL_3(\mathbb{R})$. $P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}(1, 3, -4)$.
- $AU_1 \in \mathrm{vect}(U_1) = E_1$,
  $AU_2 \in E_3 = \mathrm{vect}(U_2)$
  $AU_3 \in E_{-4} = \mathrm{vect}(U_3)$

$P^{-1}MP = \underbrace{\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}_{D'}$, avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$

$D'^2 = D$

$$\begin{cases} \lambda_1^2 = 1 \\ \lambda_2^2 = 3 \\ \lambda_3^2 = -4 \end{cases}$$ Impossible.

Pas de solution

Rem : Nombre de solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$: 8.

[2] ① $\operatorname{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$ est fermé.

φ continue, $\{0\}$ fermé

② def simul (N, no, m, M) : # N : taille de l'échantillon

```
def simul(N, no, m, M):
    L = [ ]
    for i in range(N):
        n = randint(0, no)          # on génère un degré entre 0 et no
        No = 0
        phi = 0
        for k in range(n+1):
            a = random() * (M-m) + m    # on génère un coef dans [-m, M]
            No += (a*a)                 # on calcule No = ||P||.
            phi += (a / (2 ** k))
        q = phi / sqrt(No)          # calcule q(P) avec P = sum_{k=0}^{n} a_k X^k
        L.append(q)                 # L est la liste des valeurs de q(P)
    return L

print(simul(1000, 50, -1000, 1000))
```

q est bornée.

③ Cauchy-Schwarz $\rightarrow$ $|\varphi(P)| = |\langle P, Q\rangle|$ en posant $Q = \sum_{k=0}^{\deg P} \frac{1}{2^k} X^k$

$$\leq \|P\| \times \|Q\| = \|P\| \times \sqrt{\sum_{k=0}^{\deg P} \frac{1}{4^k}}$$

$$|q(P)| \leq \|Q\| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

q est bornée.

④ Caractérisation de la continuité des appli linéaires sur l'evn $\mathbb{R}[X]$: φ est continue

donc (Q1) $\boxed{\operatorname{Ker}\varphi \text{ est fermé}}$

⑤ $A^\perp$ est un sous-ev de E

$A^\perp = \bigcap_{Q \in A} \underbrace{\operatorname{Ker}(\varphi_Q)}_{\text{fermé}}$ en posant $\varphi_Q : P \longmapsto \langle P, Q\rangle \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

$|\varphi_Q(P)| \leq \|P\| \times \|Q\|$ donc φ_Q est continue.

$A^\perp$ est fermé.

3 $M_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ n \geqslant 3$

(2) On conjecture : $\{(\lambda-1)^2,\ \lambda \in Sp(M)\} = \{1 ; n-1\}$

$Sp(M) \subset \{0 ; 1-\sqrt{n-1} ; 1+\sqrt{n-1}\}$.

(3) • $rg\, M_n = rg\,(C_1, \dots, C_n) = rg\left(\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right) = 2$

donc $\dim \operatorname{Ker} M_n = n-2$, $\omega_{M_n}(0) \geqslant 2$ (Ordre de 0 dans χ_{M_n})

$\chi_{M_n} = X^{n-2}(X-\lambda)(X-\mu)$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

• $\chi_{M_n^2} = X^{n-2}(X-\lambda^2)(X-\mu^2)$, $\qquad M_n^2 = \begin{pmatrix} n & & & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ * & & 1 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} \lambda+\mu = \operatorname{tr} M_n = 2 \\ \lambda^2+\mu^2 = \operatorname{tr} M_n^2 = n+(n-2)+2 = 2n \end{cases}$

$\lambda^2 + (2-\lambda)^2 = 2n$

$2\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 2n = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 2 - n = 0. \qquad \Delta' = 1-(2-n) = n-1 \geqslant 0 \qquad (\lambda, \mu) \in \{1 \pm \sqrt{n-1}\}^2$

$Sp(M_n) = \{0 ; 1-\sqrt{n-1} ; 1+\sqrt{n-1}\}$

• Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$:

$M_n X = 0 \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=2}^{n} x_i = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ -\sum_{i=2}^{n-1} x_i \end{pmatrix}$

$\iff X \in \operatorname{vect}(e_i - e_n)_{2 \leqslant i \leqslant n-1}$

en posant $(e_1 — e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$E_0(M_n) = \operatorname{Ker} M_n = \underbrace{\operatorname{vect}(e_i - e_n)_{2 \leqslant i \leqslant n-1}}$ base (libre car échelonnée dans la base $(e_1, e_n, e_2 — e_{n-1})$)

• Pour $\lambda = 1 \pm \sqrt{n-1}$:

$$MX = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i \\ x_1 \\ | \\ x_1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \end{pmatrix}$$

$$M_n X = \lambda X \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = \lambda x_1 \\ \forall i \in [\![2, n-1]\!], \ x_1 = \lambda x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = \lambda x_n \end{cases}$$

$$\underset{(\lambda \neq 0)}{\iff} \begin{cases} x_n = x_1 \\ \forall i \in [\![2, n-1]\!], \ x_i = \frac{1}{\lambda} x_1 \\ \left(2 + (n-2) \times \frac{1}{\lambda}\right) = \lambda \end{cases}$$

$$\iff X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\lambda \\ | \\ 1/\lambda \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \underset{\text{Vrai}}{\lambda^2 - 2\lambda - (n-2) = 0}$$

$$E_\lambda(M_n) = \ker(M_n - \lambda I_n) = \text{vect} \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ | \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

<u>Rema:</u> on retrouve $\lambda \in Sp(M_n) \iff \lambda^2 - 2\lambda - (n-2) = 0$

---

④ <u>Avant le calcul des sous-espaces propres:</u>

$\lambda_1 = 1 + \sqrt{n-1}$ et $\lambda_2 = 1 - \sqrt{n-1}$ sont des racines simples de χ_{M_n}

<u>donc</u> $\dim E_{\lambda_1}(M_n) = 1 = \omega_{\lambda_1}(M_n)$

$\dim E_{\lambda_2}(M_n) = 1 = \omega_{\lambda_2}(M_n)$

<u>De plus:</u> $\dim E_0(M_n) = \dim \ker M_n = n - rg\, M_n = n-2 = \omega_0(M_n)$

les ordres sont égaux aux dimensions. <u>M_n est diagonalisable.</u>

$\boxed{4}$ (E_n) : $nx^3 + n^2x - 2 = 0$

② $f_n : x \longmapsto nx^3 + n^2x - 2$ est st $\nearrow$ (par somme) et continue sur $\mathbb{R}$,

donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[= \mathbb{R}$.

$\exists!\, u_n \in \mathbb{R},\ f_n(u_n) = 0$

③ • $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$

$0 = f_{n+1}(u_{n+1}) \geqslant f_n(u_{n+1})$

$= f_n(u_n)$

Or f_n est $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$, donc $u_n \geqslant u_{n+1}$ $\quad$ (u_n) est $\downarrow$

• $f_n(0) = -2 < f_n(u_n) = 0$ donc $0 < u_n$ $\quad$ (u_n) est minorée par 0

• $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \geqslant 0$.

$\ell > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} n u_n^3 + n^2 u_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(u_n) = +\infty$ Absurde

$u_n \longrightarrow 0$

⑤ . $n u_n^3 + n^2 u_n = 2$

• $u_n = \dfrac{2}{n^2} - \dfrac{u_n^3}{n} = \dfrac{2}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

• $u_n^3 = o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ donc $\dfrac{u_n^3}{n} = o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$

$u_n = \dfrac{2}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^4}\right) \sim \dfrac{2}{n^2}$ $\quad$ $\sum u_n$ converge

⑥ • $u_n^3 \sim \dfrac{8}{n^6}$ donc $\dfrac{u_n^3}{n} \sim \dfrac{8}{n^7}$

$u_n = \dfrac{2}{n^2} - \dfrac{8}{n^7} + o\left(\dfrac{1}{n^7}\right)$

$\boxed{5}$ 3

- $$\prod_{p=0}^{n} p! = \prod_{p=1}^{n}\prod_{k=1}^{p} k$$

$$= \prod_{1\leq k\leq p\leq n} k$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=k}^{n} k = \prod_{k=1}^{n} k^{n-k+1}$$

- $$\prod_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = n!^{n+1}\times\frac{1}{\prod_{p=0}^{n} p! \times \prod_{p=0}^{n}(n-p)!}$$

$$= \frac{n!^{n+1}}{\left(\prod_{p=0}^{n} p!\right)^2} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^{n+1}}{\left(\prod_{k=1}^{n} k^{n-k+1}\right)^2} = \frac{\prod_{k=1}^{n} k^{n+1}}{\prod_{k=1}^{n} k^{2n-2k+2}} = \prod_{k=1}^{n} k^{2k-n-1}$$

4

- $\ln G_n = \frac{1}{n}\ln(u_n)$ $\quad$ Pour $n\in\mathbb{N}^*$

$$= \frac{1}{n}\times\frac{1}{n+1}\ln\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)}\times\sum_{k=1}^{n}(2k-n-1)\ln(k).$$

- Or $$\sum_{k=1}^{n}(2k-n-1)\ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\ln(n+1)\sum_{k=1}^{n}(2k-n-1) = -\ln(n+1)\times\underbrace{\left[n(n+1)-\sum_{k=1}^{n}(n+1)\right]}_{=0}$$

donc $$\ln(G_n) = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}(2k-n-1)\ln\left(\frac{k}{n+1}\right)$$

---

⑤ $\ln(G_n) = \underbrace{\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+1}\ln\left(\frac{k}{n+1}\right)}_{A_n} - \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n+1}\right)}_{B_n}$

$A_n = 2\times\left[\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)}_{d_n} + \frac{2}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right]\ldots$

d_n est une somme de Riemann de $f: x \longmapsto x\ln x$ prolongée en 0 par continuité, continue sur $[0,1]$.

donc $d_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx = -\frac{1}{4}$

$A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{2}$

• limite de B_n: (V1) Comparaison série-intégrale avec encadrement.

(V1) $\forall k\in\mathbb{N}$, $\int_{k-1}^{k}\ln t\,dt \leq \ln(k) \leq \int_{k}^{k+1}\ln t\,dt$ (1)

$n\ln n - n = [t\ln t - t]_0^n = \int_0^n \ln t\,dt \leq \sum_{k=1}^{n}\ln(k) \leq \int_1^{n+1}\ln t\,dt = (n+1)\ln(n+1) - (n+1) + 1$

$\underbrace{\frac{1}{n}\left(n\ln n - n - n\ln(n+1)\right)}_{\beta_n} \leq B_n \leq \underbrace{\frac{1}{n}\left((n+1)\ln(n+1) - n - n\ln(n+1)\right)}_{\gamma_n}$

$\beta_n = \ln n - 1 - \ln(n+1) = -1 - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$

$\gamma_n = \frac{1}{n}\ln(n+1) - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$

Par encadrement: $\boxed{B_n \longrightarrow -1}$

(V2) Avec la formule de Stirling: $B_n = \frac{1}{n}\ln n! - \ln(n+1)$.

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = \omega_n$$

$$\ln n! = \ln \omega_n + \ln \frac{n!}{\omega_n}$$

$$= \ln \omega_n + o(1).$$

$\boxed{\text{1er Essai pas assez précis :}}$

$$\ln n! \sim \ln \omega_n = \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{2}\ln n + n\ln n - n$$

$$\sim n\ln n.$$

$$\frac{1}{n}\ln n! \sim \ln n.$$

$\boxed{\text{2ème essai avec la bonne précision :}}$

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1)$$

$$= n\ln n - n + o(n)$$

$$\frac{1}{n}\ln n! = \ln n - 1 + o(1) \qquad / \ \ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln n + o(1)$$

$$B_n = -1 + o(1) \longrightarrow -1$$

$\boxed{\text{3ème possibilité encore + précise :}}$

$$\frac{1}{n}\ln n! = \ln n - 1 + \frac{1}{2}\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln(2\pi)}{2} \times \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\ln(n+1) = \ln n + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$B_n = -1 + \frac{1}{2}\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln(2\pi)}{2} \times \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

- On a montré : $\ln(G_n) \longrightarrow -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

$$G_n \longrightarrow \sqrt{e}$$

$\boxed{8}$ ① Supposons A et B ouverts.

Soit $x \in A+B$. $x = a+b$, avec $(a,b) \in A \times B$.

$\exists r_2 > 0, \ B(b, r_2) \subset B$.

Pour $y \in B(a+b, r_2)$

$y = \underbrace{a}_{\in A} + \underbrace{b + y - (a+b)}_{b'}$

$\|b' - b\| = \|y - (a+b)\| < r_2$ donc $b' \in B(b, r_2) \subset B$.

$y \in A+B$.

On a montré $B(x, r_2) \subset A+B$.

$A+B$ est ouvert

---

② Non. On peut avoir A fermé, B fermé mais $A+B$ non fermé.

Exemple: Posons $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ xy = 1\}$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ y = 0\}$

- $A = f^{-1}(\underbrace{\{1\}}_{\text{fermé}})$ en posant $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto xy$. continue car polynômiale de (x,y)

donc A est fermé

- $B = g^{-1}(\{0\})$ en posant $g : (x,y) \longmapsto y$

(...) est fermé

- Posons $a_n = \left(n, \frac{1}{n}\right) \in A$

$b_n = (-n, 0) \in B$

$a_n + b_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[\mathbb{N}]{} (0,0)$

On $(a_n + b_n) \in A+B$

Pour $(a,b) \in A \times B$: $a + b = \left(x, \frac{1}{x}\right) + (x', 0)$ avec $x \in \mathbb{R}^*, \ x' \in \mathbb{R}$

$= \left(x + x', \frac{1}{x}\right) \neq (0,0)$ donc $(0,0) \notin A+B$

Par caractérisation séquentielle des fermés, $A+B$ n'est pas fermé.

$\boxed{9}$ Pour $p \in \mathbb{N}$, posons $a_p = \operatorname{tr}(A^p)$

- On écrit $\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - \underbrace{\lambda_i}_{\in \mathbb{C}})$.

Alors $(\dots)$ $\chi_{A^p} = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i^p)$ $\quad (P^{-1}AP = T \in T_n^+(\mathbb{C}) \Rightarrow P^{-1}A^pP = T^p)$

$$a_p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p$$

. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, la SE $\sum \lambda_i^p z^p$ est de rayon $R_i = \frac{1}{|\lambda_i|}$ (SE géométrique)

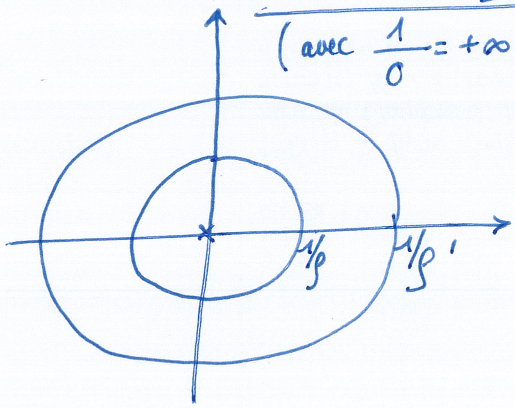
Posons R le rayon de la SE $\sum a_p z^p$.

- Posons $\rho := \max_{1 \leq i \leq n} (|\lambda_i|)$. $\rho = |\lambda_{i_0}|$, avec $i_0 \in [\![1,n]\!]$. Montrons $\boxed{R = \frac{1}{\rho}}$

(avec $\frac{1}{0} = +\infty$)

$\boxed{\text{1er cas :}}$ $\exists i \in [\![1,n]\!], |\lambda_i| < \rho$

Posons $\rho' = \max_{i \in [\![1,n]\!] \setminus i_0} |\lambda_i|$, $\rho' < \rho$



Pour $z \in \mathbb{C}$:

□ $|z| < \frac{1}{\rho} \Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], |z| < R_i$

$\Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \sum \lambda_i^p z^p$ converge

$\Rightarrow \sum a_p z^p$ converge

$\Rightarrow |z| \leq R$

On a montré $\boxed{R \geq \frac{1}{\rho}}$

□ $\frac{1}{\rho} < |z| < \frac{1}{\rho'} \Rightarrow \begin{cases} \sum \lambda_{i_0}^p z^p \text{ diverge} \\ \forall i \in [\![1,n]\!] \setminus \{i_0\}, |z| < R_i \text{ donc } \sum \lambda_i z^p \text{ converge} \end{cases}$

$\Rightarrow \sum a_p z^p$ diverge

$\Rightarrow |z| \geq R$

On a montré $\boxed{R \leq \frac{1}{\rho}}$

Ainsi : $\boxed{R = \frac{1}{\rho}}$

□ $\boxed{\text{2ème cas}}$ $\forall i \in [\![1,n]\!], |\lambda_i| = \rho$.

$\boxed{2\text{ème cas :}}$ $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $|\lambda_j| = \rho$, $\lambda_j = \rho e^{i\theta_j}$, avec $\theta_i \in \mathbb{R}$

De même que précédemment, on obtient $R \geqslant \frac{1}{\rho}$.

$a_p = \rho^p \times b_p$, en posant $b_p = \sum_{j=1}^{n} e^{ip\theta_j}$.

Pour $|z| > \frac{1}{\rho}$:

$$\sum_{p=0}^{N} a_p z^p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{p=0}^{N} (e^{i\theta_i} \rho z)^p$$

$=$

$\odot$ On a montré $R = \frac{1}{\rho}$

Pour $z \in \mathcal{B}(0,R)$:

$$\sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \lambda_i^p z^p \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\lambda_i z} \qquad (|\lambda_i z| < \rho |z| < 1)$$

Or $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X-\lambda_i)$

$\chi_A'(X) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (X-\lambda_j)$ donc $\frac{\chi_A'(X)}{\chi_A(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X-\lambda_i}$.

$$\sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p = \frac{1}{z} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{z} - \lambda_i}$$

$$= \boxed{\frac{1}{z} \frac{\chi_A'\left(\frac{1}{z}\right)}{\chi_A\left(\frac{1}{z}\right)}}$$

$\boxed{1.0}$

Recherche de CN : Soit A une éventuelle solution. $\begin{cases} A^T A^2 = A \\ \operatorname{tr} A = n \end{cases}$ (S)

(V1) • Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$.

$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{n,1}\}$, $AX = \lambda X$ (1)

$A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$, $\bar{X}^T A^T = \bar{\lambda}\bar{X}^T$ (2)

(2)x(1) $\bar{X}^T \underbrace{A^T A}_{A} X = \bar{\lambda}\lambda \bar{X}^T X$

Or $\bar{X}^T \bar{A} A X = \bar{X}^T A X = \lambda \bar{X}^T X$.

Ainsi : $\lambda\bar{\lambda} . \bar{X}^T X = \lambda . \bar{X}^T X$

Or $\bar{X}^T X = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0$, donc $\lambda\bar{\lambda} = \lambda$

$\lambda \in \{0;1\}$. (A est trigonalisable dans R)

• $\chi_A = X^p \times (X-1)^{n-p}$, avec $p \in [\![0,n]\!]$

$\operatorname{tr} A = n = n - p$ donc $p = 0$. $\chi_A = (X-1)^n$

• $0 \notin Sp(A)$ donc $A \in GL_n(\mathbb{R})$ donc $A^T A = I_n$ donc $A \in O(n)$.

Pour $j \in [\![1,n]\!]$, $\|C_j(A)\|^2 = C_j^T C_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}^2 = 1$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $t_{ii}^2 \leq 1$ donc $t_{ii} \in [-1,1]$

Or $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} t_{ii} = 1$

donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $t_{ii} = 1$

$\forall j \in [\![1,n]\!]$ $\sum_{j \neq i} t_{ij}^2 = 0$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow t_{ij} = 0$

$A = I_n$

(V2) • $\mathrm{Im} A = \mathrm{Im}\, A^TA = \mathrm{Ker}(A^TA)^\perp$ (car $A^TA \in S_n(\mathbb{R})$)

$= \mathrm{Ker}(A)^\perp$ ($A^TAX=0 \Rightarrow X^TA^TAX = 0 = \|AX\|^2 \Rightarrow AX=0$

$\mathrm{Ker} A^TA = \mathrm{Ker} A$)

En utilisant une BON de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ adaptée à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Im}(A) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(A)$:

$A' = P^T A P =: \mathrm{diag}(B, 0_{n-r})$, avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $B \in GL_r(\mathbb{R})$ ($r = \mathrm{rg} A$).

$A'^T A'^2 = P^T (A^T A^2) P$

$= P^T A P = A'$

Or $A'^T A'^2 = \mathrm{diag}(B^T B^2, 0_{n-r})$ | donc $B^T B^2 = B$

$B^T B = I_n$ (car $B \in GL_r(\mathbb{R})$)

$\boxed{B \in \mathcal{O}(r)}$

• (...) $Sp(B) \subset \mathbb{U}$

Ecrivons $\chi_B = \prod_{i=1}^{r} (X - \underbrace{\lambda_i}_{\in \mathbb{C}})$.

$\mathrm{tr} B = \mathrm{tr} A = n = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$

$n = \left|\sum_{i=1}^{r} \lambda_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{r} |\lambda_i| = r$

donc (...) $\exists \theta \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\lambda_i = e^{i\theta}$

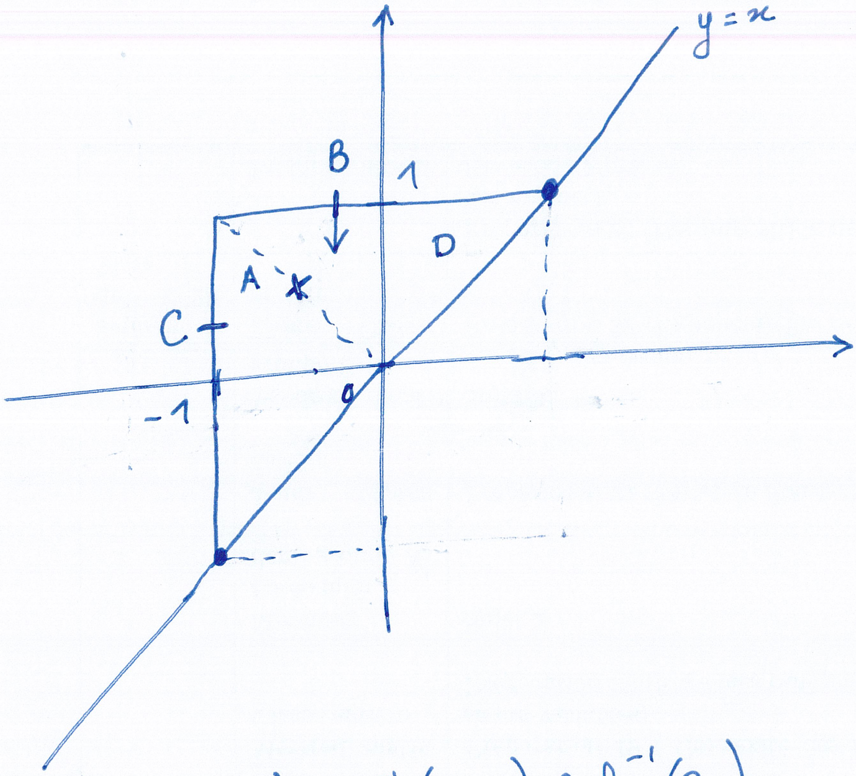
$n = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = r e^{i\theta}$ donc $r = n$ et $e^{i\theta} = 1$.

• Ainsi : $A = B \in \mathcal{O}(n)$

$\chi_A = (X-1)^n$

donc (cf V1) $\boxed{A = I_n}$

$\boxed{13}$



⊙ $D = f_1^{-1}([-1,1]) \cap f_2^{-1}([-1,1]) \cap f_3^{-1}(\mathbb{R}_+)$

en posant $f_1 : (x,y) \longmapsto x$
$f_2 : (x,y) \longmapsto y$
$f_3 : (x,y) \longmapsto y-x$

continues sur $\mathbb{R}^2$ car polynômiales des coordonnées x et y.

D est $\boxed{\text{fermé}}$ (comme intersection de fermés)
et borné ($D \subset \mathcal{B}(0,1)$) dans $\mathbb{R}^2$ de dim. finie,
f est continue (car polynômiale),
donc, d'après le théorème des bornes atteintes:
f admet un maximum et un minimum sur D.

⊙ Étude des points critiques de f sur $\mathring{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 < x < y < -1\}$, intérieur de D.

$$Df(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -3(y-x)^2 + 6y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3(y-x)^2 + 6x = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2y = (y-x)^2 \\ 2x = -(y-x)^2 = -2y \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ 2x = -(-2x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ x(1+2x) = 0 \end{cases} \iff (x$$

$$\iff (x,y) = \underbrace{(0,0)}_{\notin \mathring{D}} \text{ ou } (x,y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\iff (x,y) = A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Conclu : $\mathring{D}$ est ouvert (...)

Conclusion : Si f a un extremum local en $M \in \mathring{D}$, alors $M = A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

• Etude de f sur $D \setminus \mathring{D}$ (frontière de D)

$$D \setminus \mathring{D} = \underbrace{\{(-1,y),\ y\in[-1,1]\}}_{D_1} \cup \underbrace{\{(x,1),\ x\in[-1,1]\}}_{D_2} \cup \underbrace{\{(x,x),\ x\in[-1,1]\}}_{D_3}$$

Etude sur D_3 :

Pour $x\in[-1,1]$: $f(x,x) = 6x^2$

x	-1		0		1
$f(x,x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Etude sur D_2 :

Pour $x\in[-1,1]$, $f(x,1) = \underbrace{(1-x)^3 + 6x}_{\alpha(x)}$

$$\alpha'(x) = -3(1-x)^2+6$$
$$= 3(-x^2+2x+1)$$

Racines $r_1, r_2 = 1\pm\sqrt{2}$

$f(1,1)=6$, $f(-1,1)=2$, $f(0,1)=1$

$f(1-\sqrt{2},1) = 2\sqrt{2}+6(1-\sqrt{2}) = 2(3-2\sqrt{2})$

x	-1		$1-\sqrt{2}$		0		1
$\alpha'(x)$		$-$	0	$+$			
$f(x,1)$	2	$\searrow$	$2(3-2\sqrt{2})$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	6

Etude sur D_1 :

Pour $y\in[-1,1]$, $f(-1,y) = (y+1)^3 - 6y = f(-y,1) = \alpha(-y)$

y	-1		0		$\sqrt{2}-1$		1
$f(-1,y)$	6	$\searrow$	1	$\searrow$	$2(3-2\sqrt{2})$	$\nearrow$	2

• Extrema globaux sur D :

f atteint son Max et son Min sur $D\setminus\mathring{D}$

ou en A

$f(A) = f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

- $\max\limits_{D\setminus\mathring{D}} f = 6 > f(A)$

donc $\max\limits_{D} f = \max\limits_{D\setminus\mathring{D}} f = 6$ atteint en $(-1,-1)$ et en $(1,1)$

- $\min\limits_{D\setminus\mathring{D}} f = 2(3-\sqrt{2}) \leq f(A) = -\frac{1}{2} \iff 3-\sqrt{2} \leq -\frac{1}{4} \iff \sqrt{2} \geq \frac{13}{4} \iff 2 \geq \frac{169}{16}$ Faux

Ainsi : $f(A) \leq \min\limits_{D\setminus\mathring{D}} f$.

$\min\limits_{D} f = f(A) = -\frac{1}{2}$ atteint en $A\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

- **Extrema globaux sur $\mathring{D}$:**

$\min_{\mathring{D}} f = f(A) = -\frac{1}{2}$,

f n'admet pas de max global sur $\mathring{D}$ (sinon il serait atteint en A, et f serait constante sur $\mathring{D}$)

- **Extrema locaux sur $\mathring{D}$:**

▫ Si f a un extremum local en $M \in \mathring{D}$, alors $M = A$.

▫ f admet un min. local en A

▫ Supposons que f admet un max. local en A :
Alors f est constante sur $B(A,r) \subset \mathring{D}$, avec $r > 0$
$\nabla f = 0$ sur $B(A,r)$
Absurde (d'après le calcul des points critiques)
f n'a pas de max. local sur $\mathring{D}$.

- **Extrema locaux en un point de $D \setminus \mathring{D}$:**

▫ Si f admet un maximum local en $M \in D \setminus \mathring{D}$, alors $M = (-1,-1)$ ou $M = (1,1)$
f admet un max. local en $(-1,-1)$ et en $(1,1)$ (max global sur D)

▫ Si f admet un minimum local en $M \in D \setminus \mathring{D}$.
Alors $M = \underbrace{(1-\sqrt{2}, 1)}_{B}$ ou $M = \underbrace{(-1, \sqrt{2}-1)}_{C}$ ou $M = O = (0,0)$

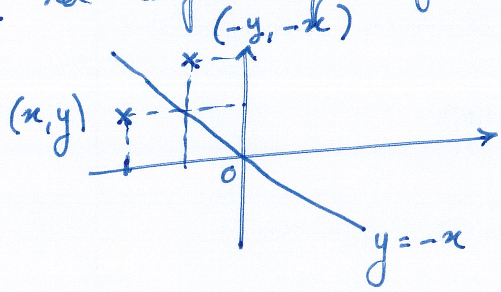
▫ Etude en B :
$\frac{\partial f}{\partial y}(B) = 3 \times \sqrt{2}^2 + 6(1-\sqrt{2}) = 6(2-\sqrt{2})$
La dérivée en B selon $-\vec{e_2}$ est $D_{-e_2} f(B) = \langle -e_2, \nabla f(B) \rangle = -\frac{\partial f}{\partial y}(B) = 6(\sqrt{2}-2) < 0$
$\exists \varepsilon > 0, \forall M \in B(B, \varepsilon), f(M) < f(B)$. Pas de min local en B

□ Etude en C :

$\forall (x,y) \in D, \quad f(-y\,;-x) = (-x+y)^3 + 6(-y)(-x) = f(x,y)$

Par symétrie, $\boxed{\text{pas de min local en } C}$

Rema : La surface S_f de f est symétrique par rapport au plan $(y=-x)$



□ Etude en O :

$\forall y \in [0,1[\quad f(-y,y) = 8y^3 - 6y^2 \underset{y\to 0}{\sim} -6y^2$

$\exists r>0 ; \ \forall y \in [0,r[, \quad f(-y,y) < 0 = f(0,0)$ $\boxed{\text{Pas de min. local en } O.}$

Rem : $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -6x+6y & 6-6y+6x \\ 6-6y+6x & 6y-6x \end{pmatrix}$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \det Hf(0,0) = -36 < 0$

((Pas de min. local en O pour $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (y-x)^2 + 6xy$))

Posons $\vec{v} = (-1,1)$.

$\vec{v}^{\,T}\, Hf(0,0)\, \vec{v} = 0x_{\vec v}^2 + 0y_{\vec v}^2 + 2\times 6 \times x_{\vec v}\, y_{\vec v} = -12$

dl2 de f en O : Pour $t \in [0,1]$:

$f(t\vec{v}) \underset{0}{=} f(0) + t\langle Df(0), \vec{v}\rangle + \frac{t^2}{2} \times \vec{v}\, Hf(0)\, \vec{v} + o(t^2)$

$\underset{0}{=} -6t^2 + o(t^2) < 0$ pour t voisin de 0.

$\boxed{\text{Pas de min. local en } O}$

$\boxed{14}$ (1) $f_n : x \longmapsto \dfrac{1}{n(1+nx)}$

- $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2 x}$ $\sum f_n(x)$ converge $\boxed{S \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*}$

- f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

Pour $a > 0$: $\|f_n\|_\infty^{[a,+\infty[} = f_n(a)$ donc $\sum f_n$ CN sur $[a,+\infty[$

Théo. de continuité $\to$ S est continue sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$

<u>donc</u> sur $\mathbb{R}_+^*$.

---

(2) • $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$, $\sum f_n$ CN sur $[1,+\infty[$

Théo de la double limite $\to$ $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 0 = 0}$

- $u_n(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2 x}$

$v_n(x) = x u_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \dfrac{1}{n^2}$

$|v_n(x)| = \dfrac{nx}{n^2(1+nx)} \leq \dfrac{1}{n^2}$, $\|v_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+^*} \leq \dfrac{1}{n^2}$ $\sum v_n$ CN sur $\mathbb{R}_+^*$

Théo de la double limite. $x f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$

---

③ • S est $\downarrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (...) donc admet une limite ℓ en 0^+.
($\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)

<u>Supposons $\ell \in \mathbb{R}$.</u>

<u>Pour $n \in \mathbb{N}^*$:</u> $\forall x > 0$, $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(1+kx)} \leq S(x)$

Quand $x \to 0^+$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ell$ Absurde.

<u>donc</u> $\ell = +\infty$, $\boxed{\lim_{0^+} S = +\infty}$

• Pour $x > 0$, on pose $g_x : t \longmapsto \dfrac{1}{t(1+tx)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{x}{1+tx}$.

g_x est continue, $\downarrow$ sur $[1, +\infty[$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_k^{k+1} g_x \leqslant g_x(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} g_x$$
(pour $k \geqslant 2$)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\left[\ln \frac{t}{1+tx}\right]_1^{n+1} = \int_1^{n+1} g_x \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(1+kx)}}_{S_n(x)} \leqslant \frac{1}{1+x} + \int_1^{n} g_x$$

$$\ln\left(\frac{n+1}{1+(n+1)x}\right) + \ln(1+x) \leqslant S_n(x) \leqslant \frac{1}{1+x} + \left[\ln \frac{t}{1+tx}\right]_1^{n}$$
$$= \frac{1}{1+x} + \ln\left(\frac{n}{1+nx}\right) + \ln(1+x),$$

Quand $n \to +\infty$
$$-\ln x + \ln(1+x) \leqslant S(x) \leqslant \frac{1}{1+x} - \ln x + \ln(1+x)$$

$$\boxed{S(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln x.}$$

<u>Rq:</u> On retrouve $S(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$