21 ① $f_n(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x^{2n+1}\ln(x)$ $\quad f_n(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$

$$f_n(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln(x)}{(x-1)(x+1)} \sim \frac{\ln x}{2(x-1)} \qquad f_n(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \frac{1}{2}$$

f_n est prolongeable par continuité sur $[0,1]$.

② • $I_n = \int_0^1 x^{2n+1} \times \frac{\ln x}{x-1} \times \frac{1}{x+1}\,dx \leqslant \int_0^1 -\ln x \times x^{2n+1} \underset{\substack{IPP\\(\dots)}}{=} \frac{1}{(2n+2)^2}$

$I_n \longrightarrow 0$

• Met 2 : $|f_n(x)| \leqslant \frac{-\ln x}{x-1}$ intégrable sur $]0,1[$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Theo. de Convergence Dominée $\rightarrow I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

③ $\forall x \in]0,1[$, $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}(x^2)^k$

$$I_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\left(-x^{2n+1}\ln x \times x^{2k}\right)}_{g_n(x)}$$

g_n est intégrable sur $]0,1[$, $\sum g_n = f_n$ est cpm sur $]0,1[$

$$\int_0^1 |g_n| = -\int_0^1 x^{2n+1+2k}\ln x\,dx = -\left[\ln x \times \frac{x^{2n+2k+2}}{2n+2k+2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{x}\times\frac{x^{2n+2k+2}}{2n+2k+2}\,dx$$

(le crochet converge)

$$= +\frac{1}{(2n+2k+2)^2} \sim +\frac{1}{4k^2}$$

$\sum \int_0^1 |g_n|$ Converge.

Theo. d'intégration terme à terme
$\downarrow$

$$I_n = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 x^{2n+2k+1}\ln x\,dx =$$

$$\underset{\substack{IPP\\(\dots)}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+2k+2)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+k+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.$$

22

29

Met 2 : <u>Rq</u> : $S(x+1) - S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{th}(x+n+1) - \operatorname{th}(n+x) = 1 - \operatorname{th}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} 2e^{-2x}$

$\sum S(n+1) - S(n)$ converge, <u>donc</u> $(S(n))$ converge.

$\lim_{n \to +\infty} S(n) = \lim_{x \to +\infty} S(x) = S(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} S(n+1) - S(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - \operatorname{th}(n))$

22 ① Met 1 : • $f_n(x) = \dfrac{e^{x+n} - e^{-x-n}}{e^{x+n} + e^{-x-n}} - \dfrac{e^{n} - e^{-n}}{e^{n} + e^{-n}}$

$= \dfrac{2e^{x} + 2e^{-x}}{(e^{n}+e^{-n})(e^{x+n} + e^{-x-n})} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{2e^{x} + 2e^{-x}}{e^{2n}}$

$\sum f_n(x)$ Converge. S est définie sur $\mathbb{R}_+$

• f_n est ↑ sur $\mathbb{R}_+$ $\lim_{x \to +\infty} \text{th}(x) = 1$

$\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+} = 1 - \text{th}(n) = 1 - \dfrac{e^{n} - e^{-n}}{e^{n} + e^{-n}} = \dfrac{2e^{-n}}{e^{n} + e^{-n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2e^{-2n}$

$\sum f_n$ CN (CU) sur $\mathbb{R}_+$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$

Theo. de Continuité → S est continue sur $\mathbb{R}_+$

Met 2 : • $f_n(x) = \text{th}'(c_{n,x}) = \dfrac{1}{\text{ch}^2(c_{n,x})}$ avec $n \leq c_{n,x} \leq n+x$.

$c_{n,x} \underset{n \to +\infty}{\sim} n$

$\leq \dfrac{1}{\text{ch}^2(n)}$

$\dfrac{1}{\text{ch}^2(n)} \sim \dfrac{4}{e^{2n}}$ donc $\sum f_n(x)$ converge

• $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+} \leq \dfrac{1}{\text{ch}^2(n)}$ $\sum f_n$ CN sur $\mathbb{R}_+$ ...

• S est ↑ sur $\mathbb{R}_+$ (somme d'une série de f° strict ↑ sur $\mathbb{R}_+$)

---

② Met 1 $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 1 - \text{th}(n)$, $\sum f_n$ CU sur $\mathbb{R}_+$

Theo de la double limite → $\lim_{x \to +\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - \text{th}(n))$.

$\boxed{30}$ ① $N \sim \mathcal{G}(p)$.

$(N,X)(\Omega) = \{(j,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq j\}$

Pour $(j,k) \in (N,X)(\Omega)$: $P(N=j, X=k) = \binom{j}{k} p^{k+1}(1-p)^{2j-k-1}$

Loi de X sachant $(N=j)$: $\mathcal{B}(j,p)$

② $X(\Omega) = \mathbb{N}$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$: $P(X=k) = \sum_{j=k}^{+\infty} \binom{j}{k} p^{k+1} (1-p)^{2j-k-1}$

$$= \sum_{j=k}^{+\infty} \binom{j}{k} \left((1-p)^2\right)^{j-k} \times p^{k+1} \times (1-p)^{k-1}$$

$$\underset{(\dots)}{=} \left(\frac{1}{1-(1-p)^2}\right)^{k+1} \times p^{k+1} \times (1-p)^{k-1} = \left(\frac{1-p}{2-p}\right)^{k-1} \times \frac{1}{(2-p)^2}.$$

$P(X=0) = \sum_{j=1}^{+\infty} p(1-p)^{2j-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} p(1-p)^{2j+1} = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}$.

③ • $U(\Omega) = \{0;1\}$, $V(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $UV(\Omega) = \mathbb{N}$.

$P(UV=0) = P(U=0) = 1-\lambda$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$: $P(VU=k) = P(U=1) \times P(V=k)$

$$= (1-\lambda)^{k-1} \times \lambda^2.$$

Pour $\lambda = \frac{1}{2-p}$; $1-\lambda = \frac{1-p}{2-p}$. $VU \sim X$.

④ • $E(X) = E(UV) = E(U) \times E(V) = \lambda \times \frac{1}{\lambda} = 1$.

• $E(X^2) = E(UV^2) = E(U) \times E(V^2) = \lambda(1-\lambda) \times \left(\frac{1-\lambda}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\right) = \frac{(1-\lambda)(2-\lambda)}{\lambda}$

• $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$= \frac{(1-p)(3-2p)}{2-p} - 1.$$

$$= \frac{(1-p)(3-2p)}{2-p}$$