$\boxed{1}$ $\boxed{\text{Ex 1}}$ ① $\|u_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = a_n$ $(a_n \geq 0)$ $\boxed{\sum u_n \text{ CN} \Leftrightarrow \sum |a_n| \text{ converge}}$

② $\cdot\ T_n(x) = \operatorname{Im}(Z_n(x))$

$$Z_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \qquad (e^{ix} \neq 1 \text{ car } x \not\equiv 0 [2\pi])$$

$$= \frac{e^{i\left(\frac{n}{2}+1\right)x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \times \frac{e^{-i\frac{n}{2}x} - e^{i\frac{n}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}}$$

$$= e^{i\left(\frac{n+1}{2}\right)x} \times \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\boxed{T_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} \times \sin\left(\frac{n+1}{2}\right)x} \qquad \boxed{|T_n(x)| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} = M_x}$$

③ • <u>Pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$:</u> $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \sin(nx) = 0$ <u>$\sum a_n u_n(x)$ converge.</u>

• <u>Prenons $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$:</u>

<u>Pour $N \in \mathbb{N}^*$:</u> posons $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x)$.

(Transformation d'Abel):

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n\left(T_n(x) - T_{n-1}(x)\right) \quad \big\downarrow n' = n-1$$

$$= \sum_{n=1}^{N} a_n T_n(x) - \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} T_n(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) T_n(x) + a_N T_N(x)$$

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|(a_n - a_{n+1}) T_n(x)| \leq M_x (a_n - a_{n+1})$

(a_n) converge, <u>donc</u> $\sum (a_n - a_{n+1})$ converge,

<u>donc</u>, par comparaison de séries à TP, $\sum (a_n - a_{n+1}) T_n(x)$ est AC <u>donc</u> <u>converge</u>

$a_N T_N(x) \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$,

<u>donc</u> $(S_N(x))_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge.

$\boxed{\sum u_n \text{ CS sur } \mathbb{R}}$

$\boxed{\text{Ex 2}}$ Recherche de CN : Supposons $M^2 = A$, avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- $MA = M^3 = AM$.

Les sous-espaces propres de A, $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I)$, $E_3 = \mathrm{Ker}(A - 3I)$, $E_{-4} = \mathrm{Ker}(A + 4I)$ sont stables par M.

- A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ (3 vp distinctes)

Disposons de $U_1 \in E_1 \setminus \{0\}$, $U_2 \in E_2 \setminus \{0\}$, $U_3 \in E_3 \setminus \{0\}$.

Posons $P = (U_1 | U_2 | U_3) \in GL_3(\mathbb{R})$. $P^{-1} A P = D = \mathrm{diag}(1, 3, -4)$.

- $AU_1 \in \mathrm{vect}(U_1) = E_1$,

$AU_2 \in E_3 = \mathrm{vect}(U_2)$

$AU_3 \in E_{-4} = \mathrm{vect}(U_3)$

$P^{-1} M P = \underbrace{\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}_{D'}$, avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$

$D'^2 = D$

$$\left|\begin{array}{l} \lambda_1^2 = 1 \\ \lambda_2^2 = 3 \\ \lambda_3^2 = -4 \text{ Impossible.} \end{array}\right.$$

Pas de solution

Rem : Nombre de solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$: 8.

3 $M_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ | & & 0 \\ | & 0 & | \\ | & & 0 \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ n \geq 3$

② On conjecture : $\{(\lambda-1)^2,\ \lambda \in Sp(M)\} = \{1 ; n-1\}$

$\boxed{Sp(M) \subset \{0 ; 1-\sqrt{n-1} ; 1+\sqrt{n-1}\}.}$

③ • $rg\, M_n = rg(C_1, \dots, C_n) = rg\left(\begin{pmatrix}1\\|\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\|\\0\\1\end{pmatrix}\right) = 2$

donc $\ker M_n = n-2$, $\omega_{M_n}(0) \geq 2$ (Ordre de 0 dans χ_{M_n})

$\boxed{\chi_{M_n} = X^{n-2}(X-\lambda)(X-\mu),}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

• $\chi_{M_n^2} = X^{n-2}(X-\lambda^2)(X-\mu^2)$, $\quad M_n^2 = \begin{pmatrix} n & & & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ * & & 1 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} \lambda+\mu = \operatorname{tr} M_n = 2 \\ \lambda^2+\mu^2 = \operatorname{tr} M_n^2 = n+(n-2)+2 = 2n \end{cases}$

$\lambda^2 + (2-\lambda)^2 = 2n$

$2\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 2n = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 2 - n = 0.$ $\quad \Delta' = 1-(2-n) = n-1 \geq 0$ $\quad \boxed{(\lambda,\mu) \in \{1 \pm \sqrt{n-1}\}^2}$

$\boxed{Sp(M_n) = \{0 ; 1-\sqrt{n-1} ; 1+\sqrt{n-1}\}}$

• Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix}$:

$M_n X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=2}^{n} x_i = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ -\sum_{i=2}^{n-1} x_i \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X \in \operatorname{vect}(e_i - e_n)_{2 \leq i \leq n-1}$

en posant $(e_1 - e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$E_0(M_n) = \ker M_n = \operatorname{vect}\underbrace{(e_i - e_n)_{2 \leq i \leq n-1}}$ base (libre car échelonnée dans la base $(e_1, e_n, e_2 - e_{n-1})$)

- Pour $\lambda = 1 \pm \sqrt{n-1}$:

$$MX = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i \\ x_1 \\ | \\ x_1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \end{pmatrix}$$

$$M_n X = \lambda X \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = \lambda x_1 \\ \forall i \in [\![2, n-1]\!],\ x_1 = \lambda x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = \lambda x_n \end{cases}$$

$$\underset{(\lambda \neq 0)}{\iff} \begin{cases} x_n = x_1 \\ \forall i \in [\![2, n-1]\!].\ x_i = \frac{1}{\lambda} x_1 \\ \left(2 + (n-2) \times \frac{1}{\lambda}\right) = \lambda \end{cases}$$

$$\iff X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\lambda \\ | \\ 1/\lambda \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \underset{\text{Vrai}}{\underbrace{\lambda^2 - 2\lambda - (n-2) = 0}}$$

$$E_\lambda(M_n) = \operatorname{Ker}(M_n - \lambda I_n) = \operatorname{vect} \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ | \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Rema: on retrouve $\lambda \in Sp(M_n) \iff \lambda^2 - 2\lambda - (n-2) = 0$

---

④ Avant le calcul des sous-espaces propres:

$\lambda_1 = 1 + \sqrt{n-1}$ et $\lambda_2 = 1 - \sqrt{n-1}$ sont des racines simples de χ_{M_n}

donc $\dim E_{\lambda_1}(M_n) = 1 = \omega_{\lambda_1}(M_n)$

$\dim E_{\lambda_2}(M_n) = 1 = \omega_{\lambda_2}(M_n)$

De plus: $\dim E_0(M_n) = \dim \operatorname{Ker} M_n = n - rg\, M_n = n-2 = \omega_0(M_n)$

les ordres sont égaux aux dimensions. M_n est diagonalisable.

6

4 (E_n) : $nx^3 + n^2x - 2 = 0$

② $f_n : x \longmapsto nx^3 + n^2x - 2$ est st ↑ (par somme) et continue sur $\mathbb{R}$, donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) = \left]\lim_{-\infty} f , \lim_{+\infty} f\right[= \mathbb{R}$.

$\boxed{\exists! \, u_n \in \mathbb{R}, \; f_n(u_n) = 0}$

③ • $\forall x \in \mathbb{R}, \; f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$

$0 = f_{n+1}(u_{n+1}) \geq f_n(u_{n+1})$

$= f_n(u_n)$

Or f_n est ↑ sur $\mathbb{R}$, donc $u_n \geq u_{n+1}$ $\quad \boxed{(u_n) \text{ est } \downarrow}$

• $f_n(0) = -2 < f_n(u_n) = 0$ donc $\boxed{0 < u_n}$ $\quad \boxed{(u_n) \text{ est minorée par } 0}$

• $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \geq 0$.

$\ell > 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} n u_n^3 + n^2 u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f_n(u_n) = +\infty$ Absurde

$\boxed{u_n \longrightarrow 0}$

⑤ • $n u_n^3 + n^2 u_n = 2$

• $u_n = \frac{2}{n^2} - \frac{u_n^3}{n} = \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

• $u_n^3 = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ donc $\frac{u_n^3}{n} = o\left(\frac{1}{n^4}\right)$

$u_n = \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \sim \frac{2}{n^2}$ $\quad \boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

⑥ • $u_n^3 \sim \frac{8}{n^6}$ donc $\frac{u_n^3}{n} \sim \frac{8}{n^7}$

$\boxed{u_n = \frac{2}{n^2} - \frac{8}{n^7} + o\left(\frac{1}{n^7}\right)}$

$\boxed{8}$ (1) Supposons A et B ouverts.

Soit $x \in A+B$. $x = a+b$, avec $(a,b) \in A \times B$.

$\exists r_2 > 0$, $B(b, r_2) \subset B$.

Pour $y \in B(a+b, r_2)$

$y = \underbrace{a}_{\in A} + \underbrace{b + y - (a+b)}_{b'}$

$\|b' - b\| = \|y - (a+b)\| < r_2$ donc $b' \in B(b, r_2) \subset B$.

$y \in A+B$.

On a montré $B(x, r_2) \subset A+B$

A+B est ouvert

(2) Non. On peut avoir A fermé, B fermé mais $A+B$ non fermé.

Exemple: Posons $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = 0\}$

- $A = f^{-1}(\underbrace{\{1\}}_{\text{fermé}})$ en posant $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto xy$. continue car polynômiale de (x,y)

donc A est fermé

- $B = g^{-1}(\{0\})$ en posant $g : (x,y) \longmapsto y$.

(...) est fermé

- Posons $a_n = (n, \frac{1}{n}) \in A$

$b_n = (-n, 0) \in B$

$a_n + b_n = (0, \frac{1}{n}) \xrightarrow[\mathbb{N}]{} (0,0)$

On $(a_n + b_n) \in A+B$

Pour $(a,b) \in A \times B$: $a + b = (x, \frac{1}{x}) + (x', 0)$ avec $x \in \mathbb{R}^*$, $x' \in \mathbb{R}$

$= (x + x', \frac{1}{x}) \neq (0,0)$ donc $(0,0) \notin A+B$

Par caractérisation séquentielle des fermés, A+B n'est pas fermé.

1.0

Recherche de CN : Soit A une éventuelle solution. $\begin{cases} A^T A^2 = A \\ \mathrm{tr} A = n \end{cases}$ (S)

(V1) • Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$.

$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{n,1}\}$, $AX = \lambda X$ (1)

$A\overline{X} = \overline{\lambda}\overline{X}$, $\overline{X}^T A^T = \overline{\lambda}\,\overline{X}^T$ (2)

(2) x (1) $\overline{X}^T \underbrace{A^T A}_{A} X = \overline{\lambda}\lambda \overline{X}^T X$

Or $\overline{X}^T \overline{A} A X = \overline{X}^T A X = \lambda \overline{X}^T X$.

Ainsi : $\lambda\overline{\lambda}.\overline{X}^T X = \lambda.\overline{X}^T X$

Or $\overline{X}^T X = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0$, donc $\lambda\overline{\lambda} = \lambda$

$\boxed{\lambda \in \{0;1\}}$. (A est trigonalisable dans R)

• $\chi_A = X^p \times (X-1)^{n-p}$, avec $p \in [\![0,n]\!]$

$\mathrm{tr} A = n = n-p$ donc $p = 0$. $\boxed{\chi_A = (X-1)^n}$

• $0 \notin Sp(A)$ donc $A \in GL_n(\mathbb{R})$ donc $A^T A = I_n$ donc $\boxed{A \in O(n)}$.

Pour $j \in [\![1,n]\!]$, $\|C_j(A)\|^2 = C_j^T C_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}^2 = 1$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $t_{ii}^2 \leq 1$ donc $t_{ii} \in [-1,1]$

Or $\mathrm{tr} A = \sum_{i=1}^{n} t_{ii} = 1$

donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $t_{ii} = 1$

$\forall j \in [\![1,n]\!]$ $\sum_{j \neq i} t_{ij}^2 = 0$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow t_{ij} = 0$

$\boxed{A = I_n}$

(V2) • $\mathrm{Im}\,A = \mathrm{Im}\,A^TA = \mathrm{Ker}(A^TA)^\perp$ (car $A^TA \in S_n(\mathbb{R})$)

$= \mathrm{Ker}(A)^\perp$ ($A^TAX = 0 \Rightarrow X^TA^TAX = 0 = \|AX\|^2 \Rightarrow AX = 0$
$\mathrm{Ker}\,A^TA = \mathrm{Ker}\,A$)

En utilisant une BON de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ adaptée à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Im}(A) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(A)$:

$A' = P^TAP = \mathrm{diag}(B, O_{n-r})$, avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$
$B \in GL_r(\mathbb{R})$ $(r = \mathrm{rg}\,A)$.

$A'^TA'^2 = P^T(A^TA^2)P$
$= P^TAP = A'$

Or $A'^TA'^2 = \mathrm{diag}(B^TB^2, O_{n-r})$ | donc $B^TB^2 = B$
$B^TB = I_n$ (car $B \in GL_r(\mathbb{R})$)
$\boxed{B \in \mathcal{O}(r)}$

• (...) $Sp(B) \subset \mathbb{U}$

Ecrivons $\chi_B = \prod_{i=1}^{r}(X - \underbrace{\lambda_i}_{\in\mathbb{C}})$.

$\mathrm{tr}\,B = \mathrm{tr}\,A = n = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$

$n = \left|\sum_{i=1}^{r} \lambda_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{r} |\lambda_i| = r$

donc (...) $\exists\, \theta \in \mathbb{R}, \forall i \in [\![1, r]\!], \lambda_i = e^{i\theta}$

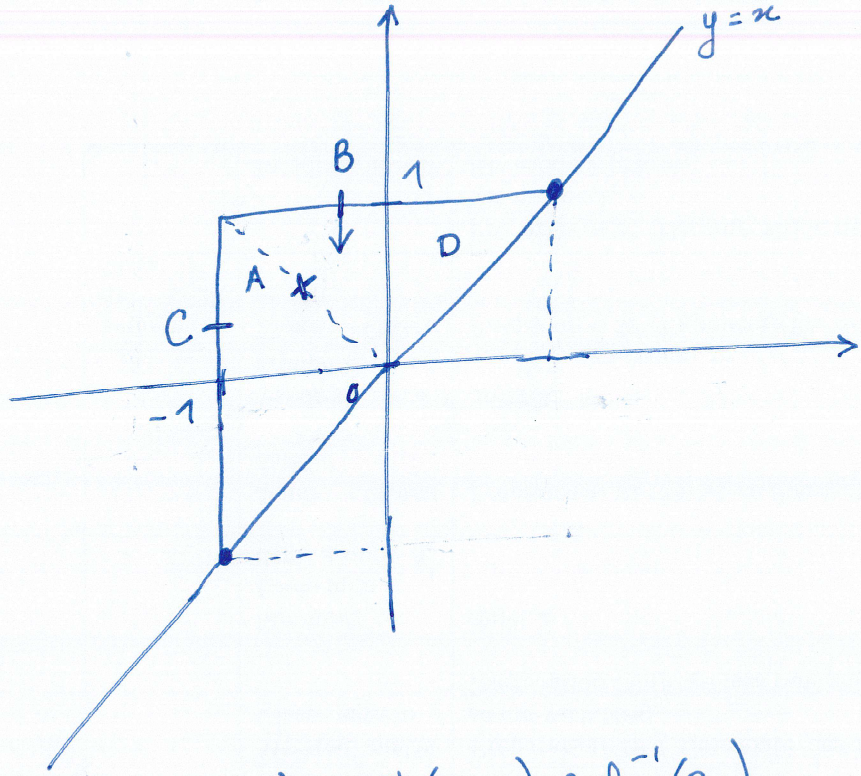
$n = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = re^{i\theta}$ donc $r = n$ et $e^{i\theta} = 1$.

• Ainsi : $A = B \in \mathcal{O}(n)$

$\chi_A = (X-1)^n$

donc (cf V1) $\boxed{A = I_n}$

$\boxed{13}$



• $D = f_1^{-1}([-1,1]) \cap f_2^{-1}([-1,1]) \cap f_3^{-1}(\mathbb{R}_+)$

en posant $f_1 : (x,y) \longmapsto x$
$f_2 : (x,y) \longmapsto y$
$f_3 : (x,y) \longmapsto y-x$

continues sur $\mathbb{R}^2$ car polynômiales des coordonnées x et y.

D est fermé (comme intersection de fermés)
et borné ($D \subset B(0,1)$) dans $\mathbb{R}^2$ de dim. finie,
f est continue (car polynômiale),
donc, d'après le théorème des bornes atteintes:
f admet un maximum et un minimum sur D.

• Etude des points critiques de f sur $\mathring{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 < x < y < -1\}$, intérieur de D.

$$Df(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -3(y-x)^2 + 6y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3(y-x)^2 + 6x = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2y = (y-x)^2 \\ 2x = -(y-x)^2 = -2y \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ 2x = -(-2x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ x(1+2x) = 0 \end{cases} \iff (x$$

$$\iff (x,y) = \underbrace{(0,0)}_{\notin \mathring{D}} \text{ ou } (x,y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\iff (x,y) = A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Conclu : $\mathring{D}$ est ouvert (...)
Si f a un extremum local en $M \in \mathring{D}$, alors $M = A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Etude de f sur $D \setminus \mathring{D}$ (frontière de D)

$$D\setminus\mathring{D} = \underbrace{\{(-1,y),\ y\in[-1,1]\}}_{D_1} \cup \underbrace{\{(x,1),\ x\in[-1,1]\}}_{D_2} \cup \underbrace{\{(x,x),\ x\in[-1,1]\}}_{D_3}$$

Etude sur D_3 :

Pour $x\in[-1,1]$: $f(x,x) = 6x^2$

x	-1		0		1
$f(x,x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Etude sur D_2 :

Pour $x\in[-1,1]$, $f(x,1) = \underbrace{(1-x)^3 + 6x}_{\alpha(x)}$

$$\alpha'(x) = -3(1-x)^2+6$$
$$= 3(-x^2+2x+1)$$

<u>Racines</u> $r_1, r_2 = 1\pm\sqrt{2}$

$f(1,1) = 6$, $\quad f(-1,1) = 2$ $\quad f(0,1) = 1$

$f(1-\sqrt{2}, 1) = 2\sqrt{2} + 6(1-\sqrt{2}) = 2(3-2\sqrt{2})$

x	-1		$1-\sqrt{2}$		0		1
$\alpha'(x)$		$-$	0	$+$			
$f(x,1)$	2	$\searrow$	$2(3-2\sqrt{2})$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	6

Etude sur D_1 :

Pour $y\in[-1,1]$, $f(-1,y) = (y+1)^3 - 6y = f(-y,1) = \alpha(-y)$

y	-1		0		$\sqrt{2}-1$		1
$f(-1,y)$	6	$\searrow$	1	$\searrow$	$2(3-2\sqrt{2})$	$\nearrow$	2

Extrema globaux sur D :

f atteint son Max et son Min sur $D\setminus\mathring{D}$

ou en A

$f(A) = f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

- $\max\limits_{D\setminus\mathring{D}} f = 6 > f(A)$

  <u>donc</u> $\boxed{\max\limits_{D} f = \max\limits_{D\setminus\mathring{D}} f = 6 \text{ atteint en } (-1,-1) \text{ et en } (1,1)}$

- $\min\limits_{D\setminus\mathring{D}} f = 2(3-\sqrt{2}) \leq f(A) = -\frac{1}{2} \iff 3-\sqrt{2} \leq -\frac{1}{4} \iff \sqrt{2} \geq \frac{13}{4} \iff 2 \geq \frac{169}{16}$ Faux

<u>Ainsi</u> : $f(A) \leq \min\limits_{D\setminus\mathring{D}} f$. $\quad \boxed{\min\limits_{D} f = f(A) = -\frac{1}{2} \text{ atteint en } A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$

- Extrema globaux sur $\overset{\circ}{D}$:

$\min_{\overset{\circ}{D}} f = f(A) = -\frac{1}{2}$,

f n'admet pas de max global sur $\overset{\circ}{D}$ (sinon il serait atteint en A, et f serait constante sur $\overset{\circ}{D}$)

- Extrema locaux sur $\overset{\circ}{D}$:

□ Si f a un extremum local en $M \in \overset{\circ}{D}$, alors $M = A$.

□ f admet un min. local en A

□ Supposons que f admet un max. local en A :
Supposons f est constante sur $B(A,r) \subset \overset{\circ}{D}$, avec $r > 0$

Alors $\nabla f = 0$ sur $B(A,r)$

Absurde (d'après le calcul des points critiques)

f n'a pas de max. local sur $\overset{\circ}{D}$.

- Extrema locaux sur un point de $D \setminus \overset{\circ}{D}$:

□ Si f admet un maximum local en $M \in D \setminus \overset{\circ}{D}$, alors $M = (-1,-1)$ ou $M = (1,1)$

f admet un max. local en $(-1,-1)$ et en $(1,1)$ (max global sur D)

□ Si f admet un minimum local en $M \in D \setminus \overset{\circ}{D}$.

Alors $M = \underbrace{(1-\sqrt{2}, 1)}_{B}$ ou $M = \underbrace{(-1, \sqrt{2}-1)}_{C}$ ou $M = O = (0,0)$

□ Etude en B :

$\frac{\partial f}{\partial y}(B) = 3 \times \sqrt{2}^2 + 6(1-\sqrt{2}) = 6(2-\sqrt{2})$

La dérivée en B selon $-\vec{e_2}$ est $D_{-e_2} f(B) = \langle -e_2, \nabla f(B) \rangle = -\frac{\partial f}{\partial y}(B) = 6(\sqrt{2}-2) < 0$

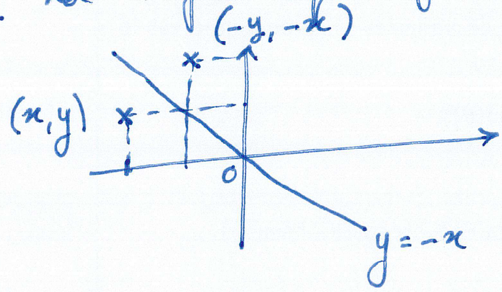
$\exists \varepsilon > 0, \forall M \in B(B, \varepsilon), f(M) < f(B)$. Pas de min local en B

□ **Etude en C :**

$\forall (x,y) \in D, \quad f(-y\,;-x) = (-x+y)^3 + 6(-y)(-x) = f(x,y)$

Par symétrie, $\boxed{\text{pas de min local en C.}}$

Rmq : La surface S_f de f est symétrique par rapport au plan $(y=-x)$



□ **Etude en O :**

$\forall y \in [0,1[\quad f(-y,y) = 8y^3 - 6y^2 \underset{y\to 0}{\sim} -6y^2$

$\exists r>0 \,;\ \forall y \in [0,r[, \quad f(-y,y) < 0 = f(0,0)$ $\quad \boxed{\text{Pas de min. local en O.}}$

Rem : $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -6x+6y & 6-6y+6x \\ 6-6y+6x & 6y-6x \end{pmatrix}$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det Hf(0,0) = -36 < 0$

$\left(\left(\right.\right.$ Pas de min. local en 0 pour $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (y-x)^2 + 6xy$ $\left.\left.\right)\right)$

Posons $\vec{v} = (-1,1)$.

$\vec{v}^{\,T} Hf(0,0)\, \vec{v} = 0x_{\vec v}^2 + 0y_{\vec v}^2 + 2\times 6\times x_{\vec v}\, y_{\vec v} = -12$

dl2 de f en 0 : Pour $t \in [0,1]$:

$f(t\vec{v}) \underset{0}{=} f(0) + t\langle Df(0), \vec{v}\rangle + \dfrac{t^2}{2} \times \vec{v}\, Hf(0)\, \vec{v} + o(t^2)$

$\underset{0}{=} -6t^2 + o(t^2) < 0$ pour t voisin de 0.

$\boxed{\text{Pas de min. local en O}}$