1 Ex 1 ① $\|u_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = a_n \ (a_n \geq 0)$ $\boxed{\sum u_n \text{ CN} \Leftrightarrow \sum |a_n| \text{ converge}}$

② $T_n(x) = \mathrm{Im}(Z_n(x))$

$$Z_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \qquad (e^{ix} \neq 1 \text{ car } x \not\equiv 0[2\pi])$$

$$= \frac{e^{i(\frac{n}{2}+1)x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \times \frac{e^{-i\frac{n}{2}x} - e^{i\frac{n}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}}$$

$$= e^{i\left(\frac{n+1}{2}\right)x} \times \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\boxed{T_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} \times \sin\left(\frac{n+1}{2}\right)x} \qquad \boxed{|T_n(x)| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} = M_x}$$

③ • Pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \sin(nx) = 0$ $\quad$ $\sum a_n u_n(x)$ converge.

• Prenons $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$:

Pour $N \in \mathbb{N}^*$: posons $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x)$.

(Transformation d'Abel) :

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \left(T_n(x) - T_{n-1}(x)\right) \quad n' = n-1$$

$$= \sum_{n=1}^{N} a_n T_n(x) - \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} T_n(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) T_n(x) + a_N T_N(x)$$

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|(a_n - a_{n+1}) T_n(x)| \leq M_x (a_n - a_{n+1})$

(a_n) converge, donc $\sum (a_n - a_{n+1})$ converge,

donc, par comparaison de séries à TP, $\sum (a_n - a_{n+1}) T_n(x)$ est AC donc converge

$a_N T_N(x) \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$,

donc $(S_N(x))_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge.

• $\boxed{\sum u_n \text{ CS sur } \mathbb{R}}$

$\boxed{\text{Ex 2}}$ Recherche de CN : Supposons $M^2 = A$, avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- $MA = M^3 = AM$.
  Les sous-espaces propres de A, $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I)$, $E_3 = \mathrm{Ker}(A - 3I)$, $E_{-4} = \mathrm{Ker}(A + 4I)$ sont stables par M.
- A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ (3 vp. distinctes)
  Disposons de $U_1 \in E_1 \setminus \{0\}$, $U_2 \in E_2 \setminus \{0\}$, $U_3 \in E_3 \setminus \{0\}$.
  Posons $P = (U_1 | U_2 | U_3) \in GL_3(\mathbb{R})$. $P^{-1} A P = D = \mathrm{diag}(1, 3, -4)$.
- $AU_1 \in \mathrm{vect}(U_1) = E_1$,
  $AU_2 \in E_3 = \mathrm{vect}(U_2)$
  $AU_3 \in E_{-4} = \mathrm{vect}(U_3)$

$P^{-1} M P = \underbrace{\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}_{D'}$, avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$

$D'^2 = D$

$$\left|\begin{array}{l} \lambda_1^2 = 1 \\ \lambda_2^2 = 3 \\ \lambda_3^2 = -4 \text{ Impossible.} \end{array}\right.$$

Pas de solution

Rem : Nombre de solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$: 8.

2 ① $\mathrm{Ker}\,\varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$ est fermé.

continue fermé

② def simul(N, n0, m, M) : # N : taille de l'échantillon

```
def simul(N, n0, m, M):          # N : taille de l'échantillon
    L = [ ]
    for i in range(N):
        n = randint(0, n0)       # on génère un degré entre 0 et n0
        No = 0
        phi = 0
        for k in range(n+1):
            a = random() * (M-m) + m   # on génère un coef dans [-m, M]
            No += (a*a)                # on calcule No = ||P||.
            phi += (a/(2**k))
        q = phi/sqrt(No)               # calcule q(P) avec P = sum_{k=0}^{n} a_k X^k
        L.append(q)                    # L est la liste des valeurs de q(P)
    return L

print(simul(1000, 50, -1000, 1000))
```

q est bornée.

③ Cauchy - Schwarz $\rightarrow |\varphi(P)| = |\langle P, Q\rangle|$ en posant $Q = \sum_{k=0}^{\deg P} \frac{1}{2^k} X^k$

$$\leq \|P\| \times \|Q\| = \|P\| \times \sqrt{\sum_{k=0}^{\deg P} \frac{1}{4^k}}$$

$$|q(P)| \leq \|Q\| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

q est bornée. ~~: φ est continue~~

④ Caractérisation de la continuité des appli linéaires sur l'evn $\mathbb{R}[X]$

donc (Q1) $\boxed{\mathrm{Ker}\,\varphi \text{ est fermé}}$

⑤ $A^\perp$ est un sous-ev de E

$A^\perp = \bigcap_{Q \in A} \underbrace{\mathrm{Ker}(\varphi_Q)}_{\text{fermé}}$ en posant $\varphi_Q : P \mapsto \langle P, Q\rangle \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

$|\varphi_Q(P)| \leq \|P\| \times \|Q\|$ donc φ_Q est continue.

$\boxed{A^\perp \text{ est fermé.}}$

$\boxed{3}$ $M_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geqslant 3$

② On conjecture : $\{(\lambda-1)^2, \lambda \in Sp(M)\} = \{1 ; n-1\}$

$$\boxed{Sp(M) \subset \{0 ; 1-\sqrt{n-1} ; 1+\sqrt{n-1}\}.}$$

③ • $rg M_n = rg(C_1, \dots, C_n) = rg\left(\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\right) = 2$

dim Ker $M_n = n-2$. $\omega_{M_n}(0) \geqslant 2$ (Ordre de 0 dans χ_{M_n})

$\boxed{\chi_{M_n} = X^{n-2}(X-\lambda)(X-\mu),}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

• $\chi_{M_n^2} = X^{n-2}(X-\lambda^2)(X-\mu^2)$. $M_n^2 = \begin{pmatrix} n & & * \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ * & & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} \lambda+\mu = tr M_n = 2 \\ \lambda^2+\mu^2 = tr M_n^2 = n+(n-2)+2 = 2n \end{cases}$

$\lambda^2 + (2-\lambda)^2 = 2n$

$2\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 2n = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 2 - n = 0$. $\Delta' = 1-(2-n) = n-1 \geqslant 0$ $\boxed{(\lambda,\mu) \in \{1 \pm \sqrt{n-1}\}^2}$

$$\boxed{Sp(M_n) = \{0 ; 1-\sqrt{n-1}, 1+\sqrt{n-1}\}}$$

• Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$:

$M_n X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=2}^{n} x_i = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ -\sum_{i=2}^{n-1} x_i \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X \in vect(e_i - e_n)_{2 \leqslant i \leqslant n-1}$

en posant $(e_1 - e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$E_0(M_n) = Ker M_n = \underbrace{vect(e_i - e_n)_{2 \leqslant i \leqslant n-1}}$, base (libre car échelonnée dans la base $(e_1, e_n, e_2 - e_{n-1})$)

- Pour $\lambda = 1 \pm \sqrt{n-1}$:

$$MX = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i \\ x_1 \\ | \\ x_1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \end{pmatrix}$$

$$M_n X = \lambda X \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = \lambda x_1 \\ \forall i \in [\![2, n-1]\!],\ x_1 = \lambda x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = \lambda x_n \end{cases}$$

$$\underset{(\lambda \neq 0)}{\iff} \begin{cases} x_n = x_1 \\ \forall i \in [\![2, n-1]\!].\ x_i = \frac{1}{\lambda} x_1 \\ \left(2 + (n-2) \times \frac{1}{\lambda}\right) = \lambda \end{cases}$$

$$\iff X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\lambda \\ | \\ 1/\lambda \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \underbrace{\lambda^2 - 2\lambda - (n-2) = 0}_{\text{Vrai}}$$

$$\boxed{E_\lambda(M_n) = \mathrm{Ker}\,(M_n - \lambda I_n) = \mathrm{vect} \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ | \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}}$$

__Rema:__ on retrouve $\lambda \in Sp(M_n) \iff \lambda^2 - 2\lambda - (n-2) = 0$

---

④ __Avant le calcul des sous-espaces propres:__

$\lambda_1 = 1 + \sqrt{n-1}$ et $\lambda_2 = 1 - \sqrt{n-1}$ sont des racines simples de χ_{M_n}

__donc__ $\dim E_{\lambda_1}(M_n) = 1 = \omega_{\lambda_1}(M_n)$

$\dim E_{\lambda_2}(M_n) = 1 = \omega_{\lambda_2}(M_n)$

__De plus:__ $\dim E_0(M_n) = \dim \mathrm{Ker}\, M_n = n - \mathrm{rg}\, M_n = n-2 = \omega_0(M_n)$

les ordres sont égaux aux dimensions. __M_n est diagonalisable.__

$\boxed{4}$ (E_n) : $nx^3 + n^2x - 2 = 0$

② $f_n : x \longmapsto nx^3 + n^2x - 2$ est st ↑ (par somme) et continue sur $\mathbb{R}$, donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[= \mathbb{R}$.

$\exists !\, u_n \in \mathbb{R},\ f_n(u_n) = 0$

③ • $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$

$0 = f_{n+1}(u_{n+1}) \geq f_n(u_{n+1})$

$= f_n(u_n)$

Or f_n est ↑ sur $\mathbb{R}$, donc $u_n \geq u_{n+1}$ (u_n) est ↓

• $f_n(0) = -2 < f_n(u_n) = 0$ donc $0 < u_n$ (u_n) est minorée par 0

• $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \geq 0$.

$\ell > 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} n u_n^3 + n^2 u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f_n(u_n) = +\infty$ Absurde

$u_n \longrightarrow 0$

⑤ $\cdot\ n u_n^3 + n^2 u_n = 2$

• $u_n = \frac{2}{n^2} - \frac{u_n^3}{n} = \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

• $u_n^3 = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ donc $\frac{u_n^3}{n} = o\left(\frac{1}{n^4}\right)$

$u_n = \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \sim \frac{2}{n^2}$ $\sum u_n$ converge

⑥ • $u_n^3 \sim \frac{8}{n^6}$ donc $\frac{u_n^3}{n} \sim \frac{8}{n^7}$

$u_n = \frac{2}{n^2} - \frac{8}{n^7} + o\left(\frac{1}{n^7}\right)$

$\boxed{5}$ ③ • $\displaystyle\prod_{p=0}^{n} p! = \prod_{p=1}^{n}\prod_{k=1}^{p} k$

$$= \prod_{1\leq k\leq p\leq n} k$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=k}^{n} k = \prod_{k=1}^{n} k^{n-k+1}$$

• $\displaystyle\prod_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = n!^{\,n+1} \times \frac{1}{\prod_{p=0}^{n} p! \times \prod_{p=0}^{n}(n-p)!}$

$$= \frac{n!^{\,n+1}}{\left(\prod_{p=0}^{n} p!\right)^2} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^{n+1}}{\left(\prod_{k=1}^{n} k^{n-k+1}\right)^2} = \frac{\prod_{k=1}^{n} k^{n+1}}{\prod_{k=1}^{n} k^{2n-2k+2}} = \prod_{k=1}^{n} k^{2k-n-1}$$

④ • $\ln G_n = \dfrac{1}{n}\ln(u_n)$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$= \frac{1}{n}\times\frac{1}{n+1}\ln\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)}\times\sum_{k=1}^{n}(2k-n-1)\ln(k).$$

• Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-n-1)\ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\ln(n+1)\sum_{k=1}^{n}(2k-n-1) = -\ln(n+1)\times\Big[n(n+1) - \sum_{k=1}^{n}(n+1)$

$= 0$

donc $\displaystyle\ln(G_n) = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}(2k-n-1)\ln\left(\frac{k}{n+1}\right)$

8

(5) $\ln(G_n) = \underbrace{\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+1}\ln\left(\frac{k}{n+1}\right)}_{A_n} \underbrace{- \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n+1}\right)}_{B_n}$

(a) <u>Etude de A_n:</u> avec une somme de Riemann.

$$A_n = 2\times \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)}_{\alpha_n} + \frac{2}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

α_n est une somme de Riemann de $f : x \longmapsto x\ln x$ prolongée en 0 par continuité, continue sur $[0,1]$.

<u>donc</u> $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx = -\frac{1}{4}$

$A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{2}$ <u>Rem:</u> on peut aussi utiliser une comparaison série-intégrale pour $t \longmapsto t\ln t$

(b) <u>Limite de B_n:</u> (V1) <u>Comparaison série-intégrale avec encadrement.</u>

(V1) $\forall k \geq 2$, $\int_{k-1}^{k+1}\ln t\,dt \leq \ln(k) \leq \int_{k}^{k+1}\ln t\,dt$ (1)

$$n\ln n - n = [t\ln t - t]_0^n = \int_0^n \ln t\,dt \leq \sum_{k=1}^{n}\ln(k) \leq \int_1^{n+1}\ln t\,dt = (n+1)\ln(n+1) - (n+1) + 1$$

$$\underbrace{\frac{1}{n}\left(n\ln n - n - n\ln(n+1)\right)}_{\beta_n} \leq B_n \leq \underbrace{\frac{1}{n}\left((n+1)\ln(n+1) - n - n\ln(n+1)\right)}_{\gamma_n}$$

$\beta_n = \ln n - 1 - \ln(n+1) = -1 - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$

$\gamma_n = \frac{1}{n}\ln(n+1) - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$

Par encadrement: $\boxed{B_n \longrightarrow -1}$

(V2) Avec la formule de Stirling: $B_n = \frac{1}{n}\ln n! - \ln(n+1)$.

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = \omega_n$$

$$\ln n! = \ln \omega_n + \ln \frac{n!}{\omega_n}$$

$$= \ln \omega_n + o(1).$$

1er Essai pas assez précis:

$$\ln n! \sim \ln \omega_n = \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{2}\ln n + n\ln n - n$$

$$\sim n\ln n.$$

$$\frac{1}{n}\ln n! \sim \ln n.$$

2ème essai avec la bonne précision:

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1)$$

$$= n\ln n - n + o(n)$$

$$\frac{1}{n}\ln n! = \ln n - 1 + o(1) \quad / \ \ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln n + o(1)$$

$$B_n = -1 + o(1) \longrightarrow -1$$

3ème possibilité encore + précise:

$$\frac{1}{n}\ln n! = \ln n - 1 + \frac{1}{2}\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln(2\pi)}{2}\times\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\ln(n+1) = \ln n + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$B_n = -1 + \frac{1}{2}\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln(2\pi)}{2}\times\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

- On a montré: $\ln(G_n) \longrightarrow -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

$$G_n \longrightarrow \sqrt{e}$$

6 ① • $X_1 \sim \mathcal{U}([\![0,1]\!])$

• Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose N_k : " tirer 1 boule noire au rang k "
B_k : " ______ blanche ______ "

• $X_2(\Omega) = [\![0;2]\!]$

$(X_2 = 0) = B_1 \cap B_2$

$\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$(X_2 = 2) = N_1 \cap N_2$

$\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(N_1) \times \mathbb{P}_{N_1}(N_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Ainsi : $\boxed{X_2 \sim \mathcal{U}([\![0;2]\!])}$

② $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathcal{P}(n)$: $X_n \sim \mathcal{U}([\![0,n]\!])$.

• $\mathcal{P}(1)$ est vrai (cf Q1)

• Supposons $\mathcal{P}(n-1)$ pour $n \geq 2$ donné. $X_{n-1} \sim \mathcal{U}([\![0,n-1]\!])$

Pour $k \in [\![0,n]\!]$:

$(X_{n+1} = k) = \bigsqcup_{j=0}^{n} (X_n = j) \cap (X_{n+1} = k)$

$\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}\left((X_{n-1} = j) \cap (X_n = k)\right)$ – (Probas totales)

$= \mathbb{P}(X_{n-1} = k-1) \times \mathbb{P}_{X_{n-1} = k-1}(X_{n} = k) + \mathbb{P}(X_n = k) \times \mathbb{P}_{X_n = k}(X_{n+1} = k)$

$= \frac{1}{n} \times \mathbb{P}_{X_{n-1} = k-1}(N_n) + \frac{1}{n} \mathbb{P}_{X_{n-1} = k}(B_n)$

$= \frac{1}{n} \times \frac{1+k-1}{2+n-1} + \frac{1}{n} \times \frac{1+(n-1-k)}{2+n-1}$

$= \frac{1}{n+1}$ donc $X_{n+1} \sim \mathcal{U}([\![0,n]\!])$

$\boxed{\mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie}}$

③ $$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n=k)\times \mathbb{P}(B_{n+1} \mid X_n=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n=k)\times \frac{1+k}{2+n}$$

$$= \frac{1}{2+n}\left(1+\mathbb{E}(X_n)\right) = \frac{1}{n+2}\left(1+\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

⑤ Montrons par récurrence sur $n \geqslant 2$ $\mathcal{P}(n)$: " $\mathbb{P}(X_n=k) = \dfrac{\binom{a+k-1}{k}\binom{b+n-k-1}{n-k}}{\binom{a+b+n-1}{n}}$ pour $k \in [\![0,n]\!]$ ".

• Pour $n=1$: $X_1(\Omega) = [\![0,1]\!]$

$$\frac{\binom{a+n-1}{0}\binom{b+n-1}{n}}{\binom{a+b+n-1}{n}} = \frac{\binom{a}{0}\binom{b}{1}}{\binom{a+b}{1}} = \frac{b}{a+b} = \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(X_1=0)$$

$$\frac{\binom{a+n-1}{1}\binom{b+n-2}{n-1}}{\binom{a+b+n-1}{n}} = \frac{\binom{a}{1}\binom{b-1}{0}}{\binom{a+b}{1}} = \frac{a}{a+b} = \mathbb{P}(N_1) = \mathbb{P}(X_1=1).$$ $\mathcal{P}(1)$ est vrai

• Supposons $\mathcal{P}(n)$ pour $n \geqslant 1$ donné.

$X_{n+1}(\Omega) = [\![0,n+1]\!]$

Pour $k \in [\![0,n+1]\!]$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=k) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X_n=j \cap X_{n+1}=k)$$ (Formule des probas totales)

$$= \mathbb{P}(X_n=k \cap B_{n+1}) + \mathbb{P}(X_n=k-1 \cap N_{n+1})$$

$$= \mathbb{P}(X_n=k)\times \mathbb{P}_{(X_n=k)}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(X_n=k-1)\times \mathbb{P}_{X_n=k-1}(N_{n+1})$$

$$= \frac{\binom{a+k-1}{k}\binom{b+n-k}{n-k}}{\binom{a+b+n-1}{n}} \times \frac{b+n-k}{a+b+n} + \frac{\binom{a+k-2}{k-1}\binom{b+n-k+1}{n-k+1}}{\binom{a+b+n-1}{n}} \times \frac{a+k-1}{a+b+n}$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=k) = \frac{\binom{a+k-1}{k} \times \binom{b+n-k+1}{n-k+1} \times (n-k+1) + \binom{a+k-1}{k} k \binom{b+n-k+1}{n-k+1}}{\binom{a+b+n}{n+1} \times (n+1)}$$

$$= \frac{\binom{a+k-1}{k} \times \binom{b+n-k+1}{n-k+1} (n-k+1+k)}{(n+1) \times \binom{a+b+n}{n+1}}$$

$$= \frac{\binom{a+k-1}{k} \times \binom{b+n-k+1}{n-k+1}}{\binom{a+b+n}{n+1}}.$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est Vrai -

⑥ • $N_n = \bigsqcup_{k=0}^{n-1} (N_n \cap X_{n-1} = k)$ (Probas totales).

$$\mathbb{P}(N_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_{n-1}=k) \times \mathbb{P}_{X_{n-1}=k}(N_n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_{n-1}=k) \times \frac{a+k}{a+b+n-1}$$

$$= \frac{1}{a+b+n-1}\left[a \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_{n-1}=k)}_{1} + \sum_{k=0}^{n-1} k\,\mathbb{P}(X_{n-1}=k)\right]$$

$$= \frac{1}{a+b+n-1}\left(a + E(X_{n-1})\right) \quad (1)$$

• De plus : $X_n = \sum_{k=1}^{n} 1_{N_k}$

<u>donc</u> $E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_k)$ (2)

• Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathcal{B}(n)$. $\mathbb{P}(N_n) = \frac{a}{a+b}$

• $\mathbb{P}(N_1) = \frac{a}{a+b}$. $\mathcal{B}(1)$ est Vraie.

• Supposons $\mathcal{B}(1) \dots \mathcal{B}(n-1)$ pour $n \geq 2$ donné.

(2) $\to$ $E(X_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(N_k) = (n-1)\frac{a}{a+b}$

donc (1) $\to$ $\mathbb{P}(N_n) = \frac{1}{a+b+n-1}\left(a + (n-1)\frac{a}{a+b}\right)$

$$= \frac{a\left[a+b+(n-1)a\right]}{(a+b+n-1)(a+b)} = \frac{a}{a+b}$$

$\mathcal{B}(n)$ est Vraie

$\boxed{7}$ $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ $\quad X \perp\!\!\!\perp Y$

$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

① $\mathbb{P}(X=Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k \cap Y=k)$ $\quad$ (σ-additivité)

$= \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\times(Y=k)$ $\quad$ ($X \perp\!\!\!\perp Y$)

$$p_\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(n!)^2} e^{-2\lambda}$$

③ On conjecture $\sqrt{\lambda}\, p_\lambda \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} \ell$.

⑤ On conjecture : $\forall \lambda > 0,\ g(\lambda) = \frac{2}{\pi} f(2\lambda) = p_\lambda$.

⑥ $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin\theta \times \sin^{2n-1}(\theta)\, d\theta$ $\quad$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$\underset{(IPP)}{=} \left[-\cos\theta \sin^{2n-1}(\theta)\right]_0^{\pi/2} - \displaystyle\int_0^{\pi/2} (-\cos\theta) \times (2n-1)\cos\theta \sin^{2n-2}\theta\, d\theta$

$= 0 + (2n-1)\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin^{2n-2}\theta\, d\theta$

$= (2n-1) W_{n-1} - (2n-1) W_n$

$W_n = \dfrac{2n-1}{2n} W_{n-1}$

$= \dfrac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)} W_{n-2}$, $\quad W_1 = \frac{1}{2} W_0$, $\quad W_0 = \frac{\pi}{2}$

$= \dots = \dfrac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{(2n)(2n-2)\dots \times 2} W_0$

$$= \frac{(2n)!}{\left(\prod_{k=1}^{n}(2k)\right)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi$$

(7) $$f(x) = e^{-x} \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n} \sin^{2n}\theta}{(2n)!}\, d\theta$$

(sous réserve de justification de l'interversion)

$$= e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} W_{2n}$$

$$= e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} \times \frac{\pi}{2^{2n+1} n!^2}.$$

$$\frac{2}{\pi} f(2\lambda) = e^{-2\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\lambda)^{2n}}{2^{2n} n!^2} = e^{-2\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{n!^2} = P\lambda$$

---

(8) $$f(x) = \frac{1}{2} e^{-x} \int_0^{\pi/2} \left(e^{x\sin\theta} + e^{-x\sin\theta}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left[e^{x(\sin\theta - 1)} + e^{-x(\sin\theta+1)}\right] d\theta$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{x(\sin\theta-1)}\, d\theta}_{\alpha} + \frac{1}{2} e^{-x} \underbrace{\int_0^{\pi/2} e^{-x\sin\theta}\, d\theta}_{\beta}.$$

$$0 \leq \beta \leq \int_0^{\pi/2} 1\, d\theta = \frac{\pi}{2}$$

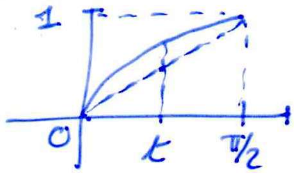
$$\alpha = \int_0^{\pi/2} e^{x(\cos\theta - 1)}\, d\theta \qquad \left(\text{CV } \theta' = \frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$= \int_0^{\pi/2} e^{-2x\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta$$

Ainsi : $$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-2x\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta + O(e^{-x})$$

(9) sin est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

donc $\mathcal{C}_{\sin}$ est au-dessus de sa corde entre 0 et $\frac{\pi}{2}$



$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\quad \sin t \geqslant \dfrac{1-0}{\frac{\pi}{2}-0}\, t + 0 = \dfrac{2}{\pi} t$

---

(10) Q7 $\rightarrow$ $p\lambda = \frac{2}{\pi} f(2\lambda)$

Q8 $\rightarrow$ $\sqrt{\lambda}\, p\lambda \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{\pi} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sqrt{\lambda}\, e^{-4\lambda \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta}_{I\lambda} + \underbrace{\sqrt{\lambda}\, O(e^{-2\lambda})}_{h(\lambda)}$

$h(\lambda) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$

$I\lambda = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2}} e^{-4\lambda \sin^2\left(\frac{u}{2\sqrt{\lambda}}\right)} du \qquad (\text{CV } u = \sqrt{\lambda}\,\theta)$

$= \displaystyle\int_0^{+\infty} F(\lambda, u)\, du$ en posant $F(\lambda, u) = \begin{cases} e^{-4\lambda \sin^2\left(\frac{u}{2\sqrt{\lambda}}\right)} & \text{si } u \leq \sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } u > \sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Pour $u \in [0, +\infty[$: pour λ grand : $F(\lambda, u) = e^{-4\lambda \sin^2\left(\frac{u}{2\sqrt{\lambda}}\right)}$

$F(\lambda, u) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} e^{-u^2} \qquad \left(\sin^2 \frac{u}{2\sqrt{\lambda}} \sim \left(\frac{u}{2\sqrt{\lambda}}\right)^2\right)$

Domination : $\forall u \geqslant 0, \forall \lambda > 0, \quad |F(\lambda, u)| \leqslant e^{-4\lambda\left(\frac{2}{\pi}\frac{u}{2\sqrt{\lambda}}\right)^2} = e^{-\frac{4u^2}{\pi^2}} = \varphi(u)$

(cf. Q9)

$\varphi(u) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$, φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Thm de CD : $I\lambda \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.

$$\sqrt{\lambda}\, p\lambda \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{\pi} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

8 ① Supposons A et B ouverts.

Soit $x \in A+B$. $x = a+b$, avec $(a,b) \in A \times B$.

$\exists R_2 > 0,\ B(b, R_2) \subset B$.

Pour $y \in B(a+b, R_2)$

$$y = \underbrace{a}_{\in A} + \underbrace{b + y - (a+b)}_{b'}$$

$\|b' - b\| = \|y - (a+b)\| < R_2$ donc $b' \in B(b, R_2) \subset B$.

$y \in A+B$.

On a montré $B(x, R_2) \subset A+B$.

$A+B$ est ouvert

② Non. On peut avoir A fermé, B fermé mais $A+B$ non fermé.

Exemple : Posons $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 1\}$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = 0\}$

• $A = f^{-1}(\underbrace{\{1\}}_{\text{fermé}})$ en posant $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto xy$ continue car polynômiale de (x,y)

donc A est fermé

• $B = g^{-1}(\{0\})$ en posant $g : (x,y) \longmapsto y$

(...) est fermé

• Posons $a_n = (n, \frac{1}{n}) \in A$

$b_n = (-n, 0) \in B$

$a_n + b_n = (0, \frac{1}{n}) \longrightarrow (0,0)$

On $(a_n + b_n) \in A+B^{\mathbb{N}}$

Pour $(a,b) \in A \times B$: $a+b = (x, \frac{1}{x}) + (x', 0)$ avec $x \in \mathbb{R}^*, x' \in \mathbb{R}$

$= (x+x', \frac{1}{x}) \neq (0,0)$ donc $(0,0) \notin A+B$

Par caractérisation séquentielle des fermés : $A+B$ n'est pas fermé.

$\boxed{9}$ Pour $p \in \mathbb{N}$, posons $a_p = \mathrm{tr}(A^p)$

- On écrit $\chi_A = \prod_{\lambda \in Sp(A)} (X-\lambda)^{\omega(\lambda)}$ avec $\omega(\lambda) \in \mathbb{N}^*$

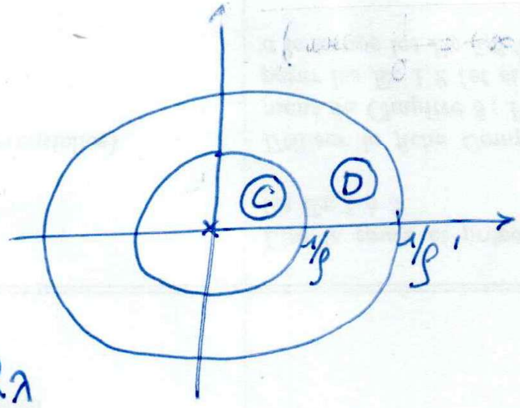
Alors (...) $\chi_{A^p} = \prod_{\lambda \in Sp(A)} (X - \lambda^p)^{\omega(\lambda)}$ $\left(P^{-1}AP = T \in T_n^+(\mathbb{C}) \Rightarrow P^{-1}A^pP = T^p\right)$

$$a_p = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \lambda^p \times \omega(\lambda)$$

- Pour $\lambda \in Sp(A)$: la SE $\sum \lambda^p z^p$ est de rayon $R_\lambda = \frac{1}{|\lambda|}$.

Posons R le rayon de la SE $\sum a_p z^p$. (SE géométrique)

- Posons $\rho := \max_{\lambda \in Sp(A)} (|\lambda|)$. Montrons $R = \frac{1}{\rho}$ (en posant $\frac{1}{0^+} = +\infty$)



- Pour $z \in \mathbb{C}$:

$|z| < \frac{1}{\rho} \Rightarrow \forall \lambda \in Sp(A), |z| < \frac{1}{\rho} \leq \frac{1}{|\lambda|} = R_\lambda$

$\Rightarrow \forall \lambda \in Sp(A), \sum_p \omega(\lambda) \lambda^p z^p$ converge.

$\Rightarrow \sum_p a_p z^p$ converge

$\Rightarrow |z| \leq R$

- Ainsi : $[0, \frac{1}{\rho}[\subset [0, R]$ donc $R \geq \frac{1}{\rho}$

- Par cas : $\exists ! \lambda_0 \in Sp(A), |\lambda_0| = \rho$

Posons $\rho' = \max_{\lambda \in Sp(A) \setminus \{\lambda_0\}} |\lambda|$, $\rho' < \rho$

- Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\frac{1}{\rho} < |z| < \frac{1}{\rho'}$

$\sum_p \lambda_0^p \omega(\lambda_0) z^p$ diverge

$\forall \lambda \in Sp(A) \setminus \{\lambda_0\}, \sum_p \lambda^p \omega(\lambda) z^p$ converge

$\rightarrow$ donc, par somme, $\sum_p a_p z^p$ diverge

- Ainsi : $]\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho'}[\subset [R, +\infty[$ donc $R \leq \frac{1}{\rho}$

• $\boxed{\text{2ème cas :}}$ $L = \{\lambda \in Sp(A),\ |\lambda| = \rho\}$ est de cardinal au moins 2.

• $$a_p = \sum_{\lambda \in L} \omega(\lambda)\,\lambda^p + \sum_{\lambda \in Sp(A)\setminus L} \omega(\lambda)\,\lambda^p.$$

$$= \rho \sum_{\lambda \in L} \omega(\lambda) \times \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^p + \sum_{\lambda \in Sp(A)\setminus L} \omega(\lambda)\,\lambda^p$$

Posons $\rho' = \max_{\lambda \in Sp(A)\setminus L} |\lambda|$.

• Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\frac{1}{\rho} < |z| < \frac{1}{\rho'}$:

$\forall \lambda \in Sp(A)\setminus L,\ |z| < \frac{1}{|\lambda|}$ donc $\sum \omega(\lambda)\lambda^p z^p$ converge.

Posons $b_p = \sum_{\lambda \in L} \omega(\lambda)\left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^p$. $\quad \forall \lambda \in L,\ \left|\frac{\lambda}{\rho}\right| = 1,\ \frac{\lambda}{\rho} = e^{i\theta_\lambda}$.

$$= \sum_{\lambda \in L} \omega_\lambda e^{i\theta_\lambda p}$$

On montre (...) que $\sum b_p z^p$ diverge.

Par somme : $\sum a_p z^p$ diverge.

• Ainsi : $\left]\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho'}\right[\subset [R, +\infty[$

donc $\boxed{R \leq \frac{1}{\rho}}$

On a montré $R = \dfrac{1}{\rho}$

Pour $z \in B(0,R)$:

$$\sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \lambda_i^p z^p \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\lambda_i z} \qquad (|\lambda_i z| < \rho |z| < 1)$$

Or $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X-\lambda_i)$

$\chi_A'(X) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (X-\lambda_j)$ donc $\dfrac{\chi_A'(X)}{\chi_A(X)} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{X-\lambda_i}$.

$$\sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p = \frac{1}{z} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{z} - \lambda_i}$$

$$= \boxed{\frac{1}{z} \frac{\chi_A'\left(\frac{1}{z}\right)}{\chi_A\left(\frac{1}{z}\right)}}$$

1.0

Recherche de CN : Soit A une éventuelle solution. $\begin{cases} A^T A^2 = A \\ \mathrm{tr} A = n \end{cases}$ (S)

(V1) • Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$.

$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{n,1}\}$, $AX = \lambda X$ (1)

$A\overline{X} = \overline{\lambda}\overline{X}$, $\overline{X}^T A^T = \overline{\lambda}\,\overline{X}^T$ (2)

(2)×(1) $\overline{X}^T \underbrace{A^T A}_{A} X = \overline{\lambda}\lambda \overline{X}^T X$

Or $\overline{X}^T \overline{A} A X = \overline{X}^T A X = \lambda \overline{X}^T X$.

Ainsi : $\lambda\overline{\lambda}.\overline{X}^T X = \lambda.\overline{X}^T X$

Or $\overline{X}^T X = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0$, donc $\lambda\overline{\lambda} = \lambda$

$\lambda \in \{0;1\}$. (A est diagonalisable dans R)

• $\chi_A = X^p \times (X-1)^{n-p}$, avec $p \in [\![0,n]\!]$

$\mathrm{tr} A = n = n-p$ donc $p = 0$. $\chi_A = (X-1)^n$

• $0 \notin Sp(A)$ donc $A \in Gl_n(\mathbb{R})$ donc $A^T A = I_n$ donc $A \in O(n)$.

Pour $j \in [\![1,n]\!]$, $\|C_j(A)\|^2 = C_j^T C_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}^2 = 1$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $t_{ii}^2 \leq 1$ donc $t_{ii} \in [-1,1]$

Or $\mathrm{tr} A = \sum_{i=1}^{n} t_{ii} = 1$

donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $t_{ii} = 1$

$\forall j \in [\![1,n]\!]$ $\sum_{j \neq i} t_{ij}^2 = 0$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow t_{ij} = 0$

$A = I_n$

V2 $\bullet$ $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A^T A = \operatorname{Ker}(A^T A)^\perp$ (car $A^T A \in S_n(\mathbb{R})$)

$= \operatorname{Ker}(A)^\perp$ ($A^T A X = 0 \Rightarrow X^T A^T A X = 0 = \|AX\|^2 \Rightarrow AX = 0$
$\operatorname{Ker} A^T A = \operatorname{Ker} A$)

En utilisant une BON de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ adaptée à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \operatorname{Im}(A) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker}(A)$:

$A' = P^T A P = \operatorname{diag}(B, O_{n-r})$, avec $P \in O_n(\mathbb{R})$
$B \in GL_r(\mathbb{R})$ $(r = \operatorname{rg} A)$.

$A'^T A'^2 = P^T (A^T A^2) P$
$= P^T A P = A'$

Or $A'^T A'^2 = \operatorname{diag}(B^T B^2, O_{n-r})$ donc $B^T B^2 = B$
$B^T B = I_n$ (car $B \in GL_r(\mathbb{R})$)
$\boxed{B \in O(r)}$

$\bullet$ (...) $Sp(B) \subset \mathbb{U}$

Ecrivons $\chi_B = \prod_{i=1}^{r} (X - \underbrace{\lambda_i}_{\in \mathbb{C}})$.

$\operatorname{tr} B = \operatorname{tr} A = n = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$.

$n = \left| \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \right| \geqslant \sum_{i=1}^{r} |\lambda_i| = r$

donc (...) $\exists \theta \in \mathbb{R}, \forall i \in [\![1, r]\!], \lambda_i = e^{i\theta}$

$n = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = r e^{i\theta}$ donc $r = n$ et $e^{i\theta} = 1$.

$\bullet$ Ainsi : $A = B \in O(n)$.

$\chi_A = (X-1)^n$

donc (cf V1) $\boxed{A = I_n}$