11 ① $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc, d'après le théo spectral, est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

23

②

V1 $M = \frac{1}{n-1}(J - I)$, en posant $J = (1)$

$M - I = \frac{1}{n-1}(J - nI)$

Or $rg\, J = 1$, donc $\dim \mathrm{Ker}\, J = n-1$ donc $\chi_J = X^{n-1}(X - \lambda)$

$\mathrm{tr}\, J = n = \lambda$.

$\chi_J = X^{n-1}(X - n)$

n est racine simple de χ_J, donc $\dim \mathrm{Ker}(J - nI) = 1$

$U = \begin{pmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(J - nI)$

$\mathrm{Ker}(M - I) = \mathrm{Ker}(J - nI) = \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix}$

③ $M - I_n \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathrm{Ker}(M - I_n) = \mathrm{Im}(M - I_n)^{\perp}$

V1

V2 $\mathrm{Im}(M - I_n) = \mathrm{vect}(C_1 — C_n)$, en posant $C_j = -e_j + \frac{1}{n-1}\sum_{i \neq j} e_i$

$\langle C_j, U \rangle = -1 + \frac{1}{n-1}\sum_{i \neq j} 1 = 0$

$C_j \in U^{\perp} = \mathrm{Ker}(M - I_n)^{\perp}$

$\mathrm{Im}(M - I_n) \subset \mathrm{Ker}(M - I_n)^{\perp}$

Théo du rang $\rightarrow$ $\mathrm{Im}(M - I_n) = \mathrm{Ker}(M - I_n)$

$\boxed{12}$ (1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- $f : X \longmapsto \|AX\|$ est continue sur $S = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\| = 1\}$,

  par composée de $X \longmapsto AX$, linéaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dim. finie,

  et de $\alpha = \| \ \|$, continue car 1-lipschitzienne (IT)

  $S = \alpha^{-1}(\underbrace{\{1\}}_{\text{fermé}})$ est fermé borné dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de dim finie.

  Théo d'atteinte des bornes : f admet un max sur S.

  $\boxed{N(A) = \max_S f \text{ existe}}$

- $f \geq 0$ sur S donc $\boxed{N(A) \geq 0.}$

- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$: $N(\lambda A) = \sup\limits_{\|X\|=1} \|\lambda AX\|$

  $= \sup\limits_{\|X\|=1} |\lambda| \|AX\|$ (homogénéité de $\| \ \|$)

  $= |\lambda| N(A)$ (homogénéité)

- Pour $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

  $\forall X \in S$, $\|(A+B)X\| \leq \|AX\| + \|BX\| \leq N(A) + N(B)$
  (IT sur $\| \ \|$)

  $N(A) + N(B)$ majore $\{\|(A+B)X\|, \|X\| = 1\}$

  donc $\boxed{N(A) + N(B) \geq N(A+B)}$ (IT)

- On a montré que $\boxed{N \text{ est } 1 \text{ norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

② $\rho(A) = \max \{|\lambda|, \lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)\}$.

(a)

- Pour $X \in S$.

$\|AX\|^2 = X^T A^T A X$

$A^T A \in S_n(\mathbb{R})$,

donc d'après le théo spectral : $P^T A^T A P = \text{diag}(\mu_1 — \mu_n) = D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$

avec $P \in \mathcal{O}(n)$

$$\|AX\|^2 = X^T P D \underbrace{P^T X}_{Y},$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu_i [Y]_i^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \rho [Y]_i^2 = \rho \|Y\|^2 = \rho \|X\|^2 = \rho \quad \text{en posant } \rho = \rho(A^T A)$$

(car $P^T \in \mathcal{O}_n$)

Ainsi : $\boxed{N(A) \leq \sqrt{\rho}}$

- $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T A^T A X = \|AX\|^2 \geq 0$

$A^T A \in S_n^+(\mathbb{R})$

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mu_i \geq 0$

$\rho \in Sp(A^T A)$. Disposons de $X \in \text{Ker}(A^T A - \mu_i I_n)$ tel que $\|X\| = 1$.

$\|AX\|^2 = X^T A^T A X = \rho X^T X = \rho \|X\|^2 = \rho$

$\boxed{\|AX\| = \sqrt{\rho}}$

- On a montré $\boxed{\sqrt{\rho} = \sup_{\|X\|=1} \|AX\| = N(A)}$

(b)

(b) : • Si $A \in Gl_n(\mathbb{R})$: $A^T A = A^{-1}(AA^T)A$

donc $\chi_{A^TA} = \chi_{AA^T}$

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $Gl_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (...)

$A = \lim\limits_{k \to +\infty} A_k$, avec $(A_k)_k \in Gl_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$:

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\chi_{A_k^T A_k}(x) = \chi_{A_k A_k^T}(x)$.

Or $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$
$M \longmapsto \chi_M(x) = \det(xI_n - M)$ est continue (...)

et $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$
$M \longmapsto M^T M$ est continue (...)

donc $(\varphi \circ \psi)(A_k) \longrightarrow (\varphi \circ \psi)(A)$

$\chi_{A_k^T A_k}(x) \longrightarrow \chi_{A^TA}(x)$

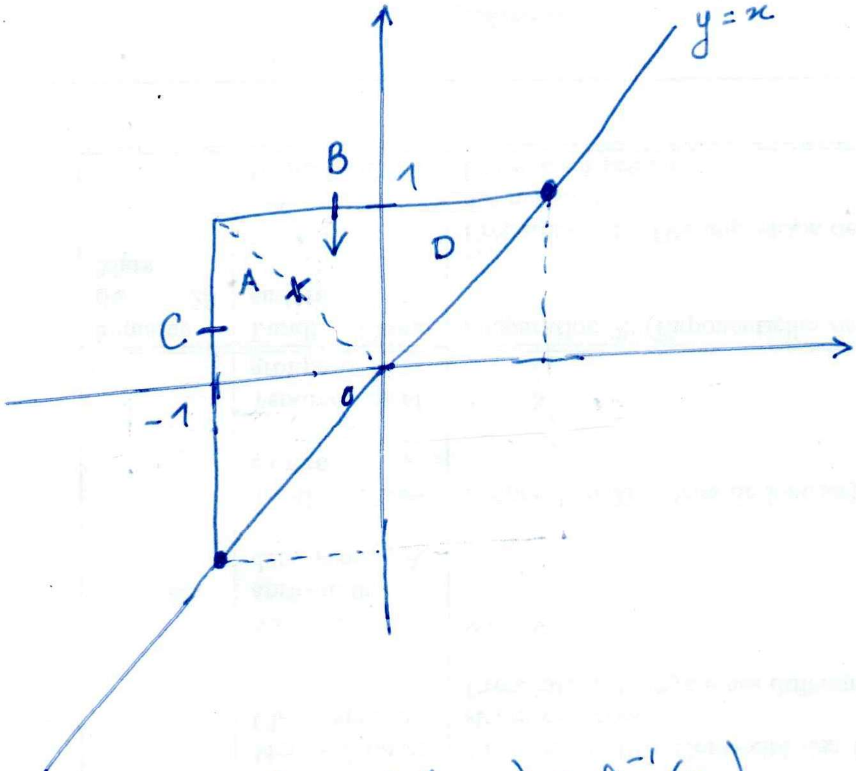
De même : $\chi_{A_k A_k^T}(x) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \chi_{AA^T}(x)$

Par unicité de la limite : $\chi_{A^TA}(x) = \chi_{AA^T}(x)$

On a montré $\chi_{A^TA} = \chi_{AA^T}$

donc $\boxed{\rho(A^TA) = \rho(AA^T)}$

$\boxed{13}$



$\odot$ $D = f_1^{-1}([-1,1]) \cap f_2^{-1}([-1,1]) \cap f_3^{-1}(\mathbb{R}_+)$

en posant $f_1 : (x,y) \longmapsto x$
$f_2 : (x,y) \longmapsto y$
$f_3 : (x,y) \longmapsto y-x$

continues sur $\mathbb{R}^2$ car polynômiales des coordonnées x et y.

D est <u>fermé</u> (comme intersection de fermés)
et borné ($D \subset B(0,1)$) dans $\mathbb{R}^2$ de dim. finie,
f est continue (car polynômiale),
<u>donc</u>, d'après le théorème des bornes atteintes :
f admet un maximum et un minimum sur D.

$\odot$ <u>Étude des points critiques de f sur $\mathring{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 < x < y < -1\}$</u>, intérieur de D.

$$Df(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -3(y-x)^2 + 6y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3(y-x)^2 + 6x = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2y = (y-x)^2 \\ 2x = -(y-x)^2 = -2y \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ 2x = -(-2x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ x(1+2x) = 0 \end{cases} \iff (x$$

$$\iff (x,y) = \underbrace{(0,0)}_{\notin \mathring{D}} \text{ ou } (x,y) = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right.$$

$$\iff (x,y) = A = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

Conclu : $\mathring{D}$ est ouvert (...)
Si f a un extremum local en $M \in \mathring{D}$, alors $M = A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Conclusion

• Etude de f sur $D \setminus \mathring{D}$ (frontière de D)

$$D \setminus \mathring{D} = \underbrace{\{(-1,y),\ y \in [-1,1]\}}_{D_1} \cup \underbrace{\{(x,1),\ x \in [-1,1]\}}_{D_2} \cup \underbrace{\{(x,x),\ x \in [-1,1]\}}_{D_3}.$$

Etude sur D_3 :

Pour $x \in [-1,1]$: $f(x,x) = 6x^2$

x	-1		0		1
$f(x,x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Etude sur D_2 :

Pour $x \in [-1,1]$, $f(x,1) = \underbrace{(1-x)^3 + 6x}_{\alpha(x)}$

$$\alpha'(x) = -3(1-x)^2 + 6$$
$$= 3(-x^2 + 2x + 1)$$

Racines $r_1, r_2 = 1 \pm \sqrt{2}$

$f(1,1) = 6$, $f(-1,1) = 2$ $f(0,1) = 1$

$f(1-\sqrt{2}, 1) = 2\sqrt{2} + 6(1-\sqrt{2}) = 2(3-2\sqrt{2})$

x	-1		$1-\sqrt{2}$		0		1
$\alpha'(x)$		$-$	0	$+$			
$f(x,1)$	2	$\searrow$	$2(3-2\sqrt{2})$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	6

Etude sur D_1 :

Pour $y \in [-1,1]$, $f(-1,y) = (y+1)^3 - 6y = f(-y,1) = \alpha(-y)$

y	-1		0		$\sqrt{2}-1$		1
$f(-1,y)$	6	$\searrow$	1	$\searrow$	$2(3-2\sqrt{2})$	$\nearrow$	2

• Extrema globaux sur D :

f atteint son Max et son Min sur $D \setminus \mathring{D}$ **ou** en A

$f(A) = f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

- $\max\limits_{D\setminus\mathring{D}} f = 6 > f(A)$

donc $\max\limits_{D} f = \max\limits_{D\setminus\mathring{D}} f = 6$ atteint en $(-1,-1)$ et en $(1,1)$

- $\min\limits_{D\setminus\mathring{D}} f = 2(3-\sqrt{2}) \leq f(A) = -\frac{1}{2} \iff 3-\sqrt{2} \leq -\frac{1}{4} \iff \sqrt{2} \geq \frac{13}{4} \iff 2 \geq \frac{169}{16}$ Faux

Ainsi : $f(A) \leq \min\limits_{D\setminus\mathring{D}} f$. $\min\limits_{D} f = f(A) = -\frac{1}{2}$ atteint en $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

⊙ Extrema globaux sur $\mathring{D}$:

$\min_{\mathring{D}} f = f(A) = -\frac{1}{2}$,

f n'admet pas de max global sur $\mathring{D}$ (sinon il serait atteint en A, et f serait constante sur $\mathring{D}$)

⊙ Extrema locaux sur $\mathring{D}$:

□ Si f a un extremum local en $M \in \mathring{D}$, alors $M = A$.

□ f admet un min. local en A

□ Supposons que f admet un max. local en A :

Alors f est constante sur $B(A,r) \subset \mathring{D}$, avec $r > 0$

$\nabla f = 0$ sur $B(A, r)$

Absurde (d'après le calcul des points critiques)

f n'a pas de max. local sur $\mathring{D}$.

⊙ Extrema locaux sur un point de $D \setminus \mathring{D}$:

□ Si f admet un maximum local en $M \in D \setminus \mathring{D}$, alors $M = (-1,-1)$ ou $M = (1,1)$

f admet un max. local en $(-1,-1)$ et en $(1,1)$ (max global sur D)

□ Si f admet un minimum local en $M \in D \setminus \mathring{D}$.

Alors $M = \underbrace{(1-\sqrt{2}, 1)}_{B}$ ou $M = \underbrace{(-1, \sqrt{2}-1)}_{C}$ ou $M = O = (0,0)$

□ Etude en B :

$\frac{\partial f}{\partial y}(B) = 3 \times \sqrt{2}^2 + 6(1-\sqrt{2}) = 6(2-\sqrt{2})$

La dérivée en B selon $-\vec{e_2}$ est $D_{-e_2} f(B) = \langle -e_2, \nabla f(B) \rangle = -\frac{\partial f}{\partial y}(B) = 6(\sqrt{2}-2) < 0$

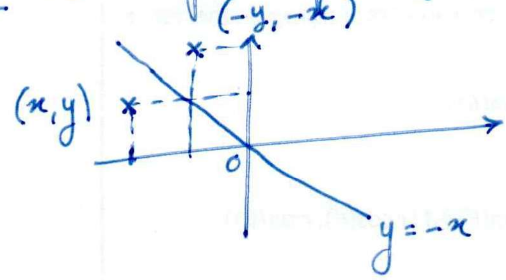
$\exists \varepsilon > 0, \forall M \in B(B, \varepsilon), f(M) < f(B)$. Pas de min local en B

- <u>Etude en C :</u>

$\forall (x,y) \in D, \quad f(-y\,;-x) = (-x+y)^3 + 6(-y)(-x) = f(x,y)$

Par symétrie, $\boxed{\text{pas de min local en C.}}$

<u>Rem :</u> La surface S_f de f est symétrique par rapport au plan $(y=-x)$



- <u>Etude en O :</u>

$\forall y \in [0,1[\quad f(-y, y) = 8y^3 - 6y^2 \underset{y\to 0}{\sim} -6y^2$

$\exists r > 0 ; \ \forall y \in [0, r[, \quad f(-y,y) < 0 = f(0,0)$ $\quad$ $\boxed{\text{Pas de min. local en O.}}$

<u>Rem :</u> $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -6x+6y & 6-6y+6x \\ 6-6y+6x & 6y-6x \end{pmatrix}$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det Hf(0,0) = -36 < 0$

((Pas de min. local en O pour $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\qquad (x,y) \mapsto (y-x)^2 + 6xy$))

Posons $\vec{v} = (-1, 1)$.

$\vec{v}^{\,T}\, Hf(0,0)\, \vec{v} = 0x_{\vec{v}}^2 + 0y_{\vec{v}}^2 + 2 \times 6 \times x_{\vec{v}}\, y_{\vec{v}} = -12$

<u>dl2 de f en O :</u> Pour $t \in [0,1]$:

$f(t\vec{v}) \underset{0}{=} f(0) + t\langle Df(0), \vec{v}\rangle + \dfrac{t^2}{2} \times \vec{v}\, Hf(0)\, \vec{v} + o(t^2)$

$\underset{0}{=} -6t^2 + o(t^2) < 0$ pour t voisin de 0.

$\boxed{\text{Pas de min. local en O}}$

14 ① $f_n : x \longmapsto \dfrac{1}{n(1+nx)}$

- $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2x}$ $\quad \sum f_n(x)$ converge $\quad$ $\boxed{S \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*}$

- f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

Pour $a>0$: $\|f_n\|_\infty^{[a,+\infty[} = f_n(a)$ donc $\sum f_n$ CN sur $[a,+\infty[$

Théo. de continuité $\rightarrow$ S est continue sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$
donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

---

② • $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$, $\quad \sum f_n$ CN sur $[1,+\infty[$

Theo de la double limite $\rightarrow$ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 0 = 0}$

- $u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2x}$

$v_n(x) = x u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{n^2}$

$|v_n(x)| = \dfrac{nx}{n^2(1+nx)} \leq \dfrac{1}{n^2}$. $\quad \|v_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+^*} \leq \dfrac{1}{n^2}$ $\quad \sum v_n$ CN sur $\mathbb{R}_+^*$

Theo de la double limite. $\quad x f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$

③ • S est $\downarrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (...) donc admet une limite ℓ en 0^+.

($\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)

Supposons $\ell \in \mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\forall x > 0$, $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(1+kx)} \leq S(x)$

Quand $x \to 0^+$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ell$ Absurde.

donc $\ell = +\infty$, $\boxed{\lim_{0^+} S = +\infty}$

• Pour $x > 0$, on pose $g_x : t \longmapsto \dfrac{1}{t(1+tx)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{x}{1+tx}$.

g_x est continue, $\downarrow$ sur $[1, +\infty[$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_k^{k+1} g_x \leq g_x(k) \leq \int_{k-1}^{k} g_x$

(pour $k \geq 2$)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left[\ln \frac{t}{1+tx}\right]_1^{n+1} = \int_1^{n+1} g_x \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(1+kx)}}_{S_n(x)} \leq \frac{1}{1+x} + \int_1^{n} g_x$$

$$\ln\left(\frac{n+1}{1+(n+1)x}\right) + \ln(1+x) \leq S_n(x) \leq \frac{1}{1+x} + \left[\ln \frac{t}{1+tx}\right]_1^{n}$$

$$= \frac{1}{1+x} + \ln\left(\frac{n}{1+nx}\right) + \ln(1+x)$$

Quand $n \to +\infty$

$$-\ln x + \ln(1+x) \leq S(x) \leq \frac{1}{1+x} - \ln x + \ln(1+x)$$

$$\boxed{S(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln x.}$$

Rq : On retrouve $S(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

15 ① (Recherche de CN) :

Met 1 Supposons que $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ vérifie $\begin{cases} \lim_0 g = 0 \\ \forall x > 0,\ g(x+1) + g(x) = \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$

$\forall x > 0,\quad (g-f)(x+1) + (g-f)(x) = 0$

$(g-f)(x+2) = (g-f)(x).\quad g-f$ est 2-périodique.

$\lim_{+\infty} (g-f) = 0.$

$\lim_{n \to +\infty} (g-f)(x_0 + 2n) = 0 = (g-f)(x_0)$ $\quad g - f = 0$ $\quad$ $\boxed{f \text{ est unique}}$

Met 2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - f(x+1)$

$= \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2} + f(x+2)$

$= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\dfrac{(-1)^k}{(x+k)^2}}_{f_k(x)} + \underbrace{f(x+n+1) \times (-1)^{n+1}}_{\to 0,\ n \to +\infty}$

$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{(x+k)^2}$ $\quad$ $\boxed{f \text{ est unique}}$

② f_k est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\|f_k\|_\infty^{[a,+\infty[} = \dfrac{1}{(a+k)^2} \sim \dfrac{1}{k^2}$ donc $\sum f_k$ CN sur $[a, +\infty[$ CU

Théo. de continuité $\to$ f est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$

sur $\mathbb{R}_+^*$

③ $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \lim_{n \to +\infty} S_n$, avec $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$
(CS)

S_n est cpm sur $[1,+\infty[$, f est cpm sur $[1,+\infty[$.

Critère spécial des SA (...) $|f(x)| \leq f_0(x) = \frac{1}{x^2}$, f_0 intégrable sur $[1,+\infty[$

donc f est int. sur $[1,+\infty[$.

((Th. de Conv. dominée : f est intégrable sur $[1,+\infty[$

et $\int_1^{+\infty} f = \lim_{n \to +\infty} \int_1^{+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_1^{+\infty} f_n$.))

• Rq : Recherche de CS :

Posons $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, en posant $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$

f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf. Q2) - dessous)

Montrons $\lim_{+\infty} f = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$, $\sum f_n$ CN sur $[1,+\infty[$,

Théo de la double limite $\to \lim_{x \to +\infty} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} 0 = 0$

$\boxed{f \text{ convient}}$

• Rq. : Comportement en 0^+ :

$f(x) = \frac{1}{x^2} - \underbrace{f(x+1)}_{\to f(1)} \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{x^2}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et f n'est pas intégrable sur $]0,1]$

$\boxed{16}$ $g : t \longmapsto \dfrac{1}{t - \ln t} = \dfrac{1}{\alpha(t)}$, $\alpha(t) = t - \ln t$

- g est continue sur $D_g = \mathbb{R}_+^*$. $D_f = \mathbb{R}_+^*$.
- $f(x) = G(2x) - G(x)$, avec G une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{\ln 2 - \ln x}{(2x - \ln 2x)(x - \ln x)} = \frac{\ln 2 - \ln x}{\alpha(2x)\alpha(x)}$$

x	0		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	

- $\boxed{\text{Met 1 :}}$

<u>Inégalités :</u> $\ln t \leq t - 1$, $t - \ln t \geq 1$, $0 \leq g(t) \leq 1$, $0 \leq f(x) \leq x$ $\boxed{\lim_{0^+} f = 0}$

-

	x	$2x$	1	x	$2x$
$\alpha(t)$	$\searrow$		1		$\nearrow$

$x \geq 1 \Rightarrow \forall t \in [x, 2x]$.

$$x - \ln x \leq t - \ln t \leq 2x - \ln 2x$$

$$\frac{1}{2x - \ln 2x} \leq g(t) \leq \frac{1}{x - \ln x}$$

$$\underbrace{\frac{x}{2x - \ln 2x}}_{\to 1/2} \leq f(x) \leq \underbrace{\frac{x}{x - \ln x}}_{\to 1}$$ inabouti

En $+\infty$:

- $x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - \ln 2x \leq t - \ln t \leq x - \ln x$

$\forall t \in [x, 2x]$, $\dfrac{1}{x - \ln x} \leq g(t) \leq \dfrac{1}{2x - \ln 2x}$

$$\frac{x}{x - \ln x} \leq f(x) \leq \frac{x}{2x - \ln 2x}$$ $\boxed{f(x) \underset{0^+}{\sim} -\frac{x}{\ln x}.}$

<u>En 0^+ :</u> $\sim -\dfrac{x}{\ln x}$ $\qquad \sim -\dfrac{x}{\ln x}$

- <u>Pour $x \geq 1$</u> suffisamment grand : $0 < x - \ln(2x) \leq t - \ln 2x \leq t - \ln t \leq t - \ln x$

$$0 < \frac{1}{t - \ln x} \leq g(t) \leq \frac{1}{t - \ln 2x}$$

$$\underbrace{\ln\left(\frac{2x - \ln x}{x - \ln x}\right)}_{\to \ln 2} \leq f(x) \leq \underbrace{\ln\left(\frac{2x - \ln 2x}{x - \ln 2x}\right)}_{\to \ln 2}$$ $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln 2}$

$\boxed{\text{Met 2}}$ $\quad f(x) \underset{t=xu}{=} \displaystyle\int_1^2 \underbrace{\frac{x\,du}{xu - \ln(xu)}}_{f(x,u)}$

• <u>En $+\infty$:</u> $\forall u,\ f(x,u) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1}{u}$

$\forall u,\ \forall x \geq 1, \quad xu - \ln(xu) \geq x - \ln(2x) > 0 \qquad (\ln(2x) \leq \ln 2 + x - 1 \leq x)$

$\dfrac{x}{xu - \ln(xu)} = |f(x,u)| \leq \dfrac{x}{x - \ln(2x)} = \alpha(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 1$ (...) <u>donc</u> α est bornée sur $[1,+\infty[$

$|f(x,u)| \leq \|\alpha\|_\infty^{[1,+\infty[}$, intégrable sur $[1,+\infty[$.

TCD : $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \displaystyle\int_1^2 \frac{du}{u} = \ln 2}$

• <u>En 0^+ :</u> $\quad \forall u, \quad f(x,u) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad \Big|\xrightarrow{\text{TCD}} f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \displaystyle\int_1^2 0 = 0$

$\forall u,\ \forall x \leq 1,\ |f(x,u)| = \dfrac{x}{xu - \ln(xu)} \leq x \leq 1$

• <u>En 0^+ :</u> $\quad \forall u, \quad f(x,u) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\dfrac{x}{\ln x}$

$-\dfrac{\ln x}{x} f(x,u) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$

$\forall u,\ \forall x > 0,\ \left|-\dfrac{\ln x}{x} f(x,u)\right| = \dfrac{-\ln x}{xu - \ln(xu)} \leq -\dfrac{\ln x}{x - \ln(2x)} = \beta(x)$

$\beta(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{-\ln x}{-\ln x} = 1$, β est bornée sur $]0,1]$.

$\left|-\dfrac{\ln x}{x} f(x,u)\right| \leq \|\beta\|_\infty^{]0,1]}$, intégrable sur $[1,2]$.

TCD : $-\dfrac{\ln x}{x} f(x) = \displaystyle\int_1^2 -\frac{\ln x}{x} f(x,u)\,du \xrightarrow[x\to 0^+]{} \int_1^2 1\,du = 1.$

$\boxed{f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\dfrac{x}{\ln x}}$

$\boxed{17}$ ① Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n : x \longmapsto e^{-n} e^{inx}$

<u>Pour $k \in \mathbb{N}$:</u>

Pour $n \in \mathbb{N}$, f_n est C^k sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(x) = (in)^k e^{-n} e^{inx}$

$$|f^{(k)}(x)| = e^{-n} \times n^k = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\|f^{(k)}\|_\infty^{\mathbb{R}} = e^{-n} n^k = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par compa. de séries à TP : $\sum f_n^{(k)}$ CN <u>donc</u> CU sur $\mathbb{R}$.

Pour $j \in [\![0, k-1]\!]$, $\sum f_n^{(j)}$ CS sur $\mathbb{R}$ (si $k \geq 1$)

Par théo de dérivation C^k : S existe et est C^k sur $\mathbb{R}$

<u>Ainsi :</u> <u>S existe et est C^∞ sur $\mathbb{R}$</u>

---

② <u>Soit $k \in \mathbb{N}$.</u>

• Posons $f_k : t \longmapsto t^k e^{-t}$.

f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_k' : t \longmapsto e^{-t}(kt^{k-1} - t^k) = e^{-t} t^{k-1}(k-t)$

t	0		k		$+\infty$
$f_k(t)$		$\nearrow$	$f_k(k)$	$\searrow$	

$\forall n \in [\![0, k-1]\!]$, $f_k(n) = n^k e^{-n} \leq \int_n^{n+1} f_k(t)\,dt$

$\forall n \in [\![k+1, +\infty[\![$ $f_k(n) = n^k e^{-n} \leq \int_{n-1}^{n} f_k(t)\,dt$

On somme de 0 à $+\infty$: $U_k = \sum_{n=0}^{+\infty} f_k(n) \leq \int_0^k f_k(t)\,dt + f_k(k) + \int_k^{+\infty} f_k(t)\,dt$

$$= f_k(k) + \int_0^{+\infty} f_k(t)\,dt$$

(les intégrales et la série convergent).

- Or $I_k = \int_0^{+\infty} f_k(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt$

$$\underset{(IPP)}{=} \underbrace{\left[k t^{k-1} e^{-t}\right]_0^{+\infty}}_{0} - \int_0^{+\infty} k t^{k-1}(-e^{-t})\,dt$$

$$= k I_{k-1}$$

$$I_k = k!\, I_0 = k!$$

- $U_k \leq n^k e^{-n} + k!$

$$\boxed{U_k = O(k!)}$$

---

③ Inégalité de Taylor-Lagrange pour S entre 0 et x à l'ordre k. (S est C^{k+1})

$$\left|S(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n\right| \leq \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \|S^{(k+1)}\|_\infty^{[0,x]} = \alpha_k(x)$$

Or: Q1 $\rightarrow$ $S^{(k+1)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (in)^{k+1} e^{-n} e^{inx}$

$$= i^{k+1} \sum_{n=0}^{+\infty} n^{k+1} e^{-n} e^{inx}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|n^{k+1} e^{-n} e^{inx}| = n^{k+1} e^{-n}$.

Q2 $\rightarrow$ $\sum_n n^{k+1} e^{-n}$ converge, donc $\sum_n n^{k+1} e^{-n} e^{inx}$ CA donc converge

$$|S^{(k+1)}(x)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} n^{k+1} e^{-n} e^{inx}\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} n^{k+1} e^{-n} = U_{k+1} = O((k+1)!)$$

$\|S^{(k+1)}\|_\infty^{[0,x]} = O(k!)$

$\alpha_k(x) = O(|x|^{k+1})$ Si $|x| < 1$: $\alpha_k(x) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

$\boxed{S \text{ est DSE sur }]-1,1[.}$ (au moins ...)

18

40

① Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$.

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x^{1/k}$$

$$x^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 1 \text{ si } x\in]0,1] \\ 0 \text{ si } x=0 \end{cases}$$

Par théo. de Cesaro (...) : $f_n(x) \longrightarrow \begin{cases} 0 \text{ si } x=0 \\ 1 \text{ si } x\in]0,1] \end{cases} = f(x)$

$$\boxed{f_n \xrightarrow{CS} f \text{ sur } [0,1]}$$

② $\begin{cases} f \text{ n'est pas continue sur } [0,1], \\ \text{Pour } n\in\mathbb{N},\ f_n \text{ est continue sur } [0,1], \end{cases}$

donc (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

• Soit $a \in]0,1]$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[a,1],\ |f_n(x)-1| = 1-f_n(x)$ $\quad (\forall k\in[\![1,n]\!],\ x^{1/k}\leq 1)$

$\leq 1-f_n(a)$ $\quad$ (f_n est ↑ sur $[0,1]$)

$$\|f_n-1\|_\infty^{[a,1]} \leq 1-f_n(a)$$

Or $f_n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$,

donc $\|f_n-1\|_\infty^{[a,1]} \longrightarrow 0$.

$$\boxed{f_n \xrightarrow[\text{sur }[a,1]]{CU} 1}$$

③ Soit $x\in[0,1]$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$f_{n+1}(x)-f_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} x^{1/k} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x^{1/k}$$

$$= \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} x^{1/k} + \frac{1}{n+1}x^{1/n+1}.$$

$$= -\frac{1}{n+1}f_n(x) + \frac{1}{n+1}x^{\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+1}\left(x^{1/n+1} - f_n(x)\right)$$

Or : $\forall k \in [\![1,n]\!],\quad x^{1/k} = e^{\frac{1}{k}\underbrace{\ln x}_{\leq 1}} \leq e^{\frac{1}{n+1}\ln x} = x^{1/n+1}$

$f_n(x) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x^{1/n+1} = x^{1/n+1}$

$f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$

$(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\nearrow$

---

④ • $b \in [0,1[$.

f_n est continue et strict $\nearrow$ sur $[0,1]$,

donc réalise 1 bijection de $[0,1]$ dans $f_n([0,1]) = [f_n(0), f_n(1)]$
$= [0,1]$

$\left(f_n(0) = 0,\quad f_n(1) = 1\right)$

Or $b \in [0,1[$, donc : $\exists!\, a_n \in [0,1[,\ f_n(a_n) = b$

(• Rem : sur $\mathbb{R}_+$: f_n réalise 1 bij. strict $\nearrow$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$)

---

⑤ • Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $b = f_n(a_n) \leq f_{n+1}(a_n)$ (cf Q3)
$= f_{n+1}(a_{n+1})$

Or f_{n+1} est $\nearrow$ sur $[0,1]$, donc $a_{n+1} \leq a_n$.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\searrow$ et minorée par 0, donc converge vers $a \in [0,1]$

• Supposons $a \neq 0$:

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad a_n \in [a, 1]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad 0 \leq 1 - f_n(a_n) \leq \|1 - f_n\|_\infty^{[a,1]}$

Q2 $\longrightarrow$ $\underset{\substack{\| \\ b}}{f_n(a_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ Absurde.

• On a montré $a_n \longrightarrow 0$

$\boxed{19}$ ① Soit $x \in \mathbb{R}$.

- $t \longmapsto \underbrace{\dfrac{1}{t^x(1+t)}}_{= g(x,t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (sur $\mathbb{R}_+$ si $x \geqslant 0$)

- En 0^+ : $g(x,t) \sim \dfrac{1}{t^x}$

  $\int_0^1 g(x,t)\,dt$ converge $\Leftrightarrow x < 1$

- En $+\infty$: $g(x,t) \sim \dfrac{1}{t^{x+1}}$

  $\int_1^{+\infty} g(x,t)$ converge $\Leftrightarrow x+1 > 1 \Leftrightarrow x > 0$

- Ainsi : $\boxed{\mathcal{D}_f =]0,1[}$

② • $\forall t \in]0,+\infty[$, $x \longmapsto g(x,t) = \dfrac{1}{e^{x\ln t}(1+t)}$ est C^0 sur $]0,1[$.

- Pour $[a,b] \subset]0,1[$:

Pour $t > 0$: $x \longmapsto g(x,t)$ est monotone sur $[a,b]$.

$\forall x \in [a,b]$, $|g(x,t)| = g(x,t) \leqslant g(a,t) + g(b,t) = \varphi(t)$

φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

- Par théorème de continuité : f continue sur $[a,b]$

- Ainsi : $\boxed{f \text{ est } C^0 \text{ sur }]0,1[}$

③ • Pour $x \in]0,1[$: $\forall t \in [1,+\infty[$, $1+t \leqslant 2t$

$$f(x) \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t^{x+1}} = \left[-\frac{t^{-x}}{2x}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2x}.$$

Par comparaison : $\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty}$

4

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}dt - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} = \int_1^{+\infty} \frac{-1}{t^{x+1}(1+t)}dt$

$$= -\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}(1+t)}dt$$

- $\forall t \geq 1, \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{dt}{t^{x+1}(1+t)} = \dfrac{1}{t(1+t)}$.

$\forall x \in]0,1[, \forall t \geq 1, \quad \left|\dfrac{1}{t^{x+1}(1+t)}\right| \leq \dfrac{1}{t(1+t)} = \varphi(t)$ intégrable sur $[1,+\infty[$

TCD: $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}(1+t)} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t)}$

$$(=) \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$(=) \left[\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\right]_1^{+\infty} = -\ln 2.$$

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} = \left[\frac{t^{-x}}{-x}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x}$

- Ainsi: $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}.}$

- $\displaystyle x \longmapsto \int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)}$ est $\uparrow$ sur $]0,1[$. et positive.

donc admet une limite finie en 0^+.

On a montré: $\boxed{f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}}$

20 (1) • Pour $f \in E$:

Disposons de F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(f)(x) = F(2x) - F(x)$

F est C^1 sur $\mathbb{R}$ ($F' = f$ est continue),

donc $\varphi(f)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$.

$\varphi(f) \in E$

$\varphi : E \longrightarrow E$.

• Pour $(f,g) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(f+\lambda g)(x) = \int_x^{2x} (f+\lambda g)(t)\,dt$$

$$= \int_x^{2x} f(t)\,dt + \lambda \int_x^{2x} g(t)\,dt$$ (linéarité de l'intégrale)

$$= \varphi(f)(x) + \lambda \varphi(g)(x)$$

$\varphi(f+\lambda g) = \varphi(f) + \lambda\varphi(g)$

On a montré $\varphi \in \mathcal{L}(E)$

• Soit $f \in \operatorname{Ker}\varphi$. $\quad \varphi(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$: $\varphi(f)'(x) = 0 = 2f(2x) - f(x)$

$f(x) = \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right)$

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = \frac{1}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$ (par continuité de f en 0)

$f(x) = 0$

On a montré $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$

$\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$.

φ est injective

② Posons $F = \{ f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f(0) = 0 \}$

• Pour $f \in E$: $\varphi(f) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

et $\varphi(f)(0) = \int_0^0 f = 0$ donc $\varphi(f) \in F$

Ainsi : $\boxed{\mathrm{Im}\,\varphi \subset F}$

• Soit $g \in F$.

• Au brouillon : Recherche de CN :

Supposons $\varphi(f) = g$, avec $f \in E$.

Alors $\varphi(f)' = g'$

$\forall x \in \mathbb{R},\ 2f(2x) - f(x) = g'(x)$

$$f(x) = \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} g'\left(\frac{x}{2}\right)$$

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad f(x) = \frac{1}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} g'\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

Quand $n \to +\infty$: $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} g'\left(\frac{x}{2^k}\right)$

Fin du brouillon.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{x}{2^k} \in [-|x|, |x|]$

donc $\left| g'\left(\frac{x}{2^k}\right) \right| \leqslant \|g'\|_\infty^{[-|x|,|x|]}$

$$\frac{1}{2^k} g'\left(\frac{x}{2^k}\right) = O\left(\frac{1}{2^k}\right)$$

Par comparaison de séries à TP : $\sum_k \frac{1}{2^k} g'\left(\frac{x}{2^k}\right)$ converge.

Posons $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} g'\left(\frac{x}{2^k}\right)$

- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $g_k : x \longmapsto \frac{1}{2^k} g'\left(\frac{x}{2^k}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (g est C^1 sur $\mathbb{R}$)

Pour $a \geq 0$:

Pour $k \in \mathbb{N}^*$

$\forall x \in [-a, a]$, $|g_k(x)| \leq \frac{1}{2^k} \|g'\|_\infty^{[-a,a]}$

$\|g_k\|_\infty^{[-a,a]} \leq \frac{1}{2^k} \|g'\|_\infty^{[-a,a]}$

Par comparaison de séries à TP, $\sum_k \|g_k\|_\infty^{[-a,a]}$ converge.

$\sum g_k$ CN donc CU sur $[-a, a]$

Par théorème de continuité : f est continue sur $[-a, a]$

Ainsi : f ——— $\mathbb{R}$

- Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(f)(x) = \int_x^{2x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} g'\left(\frac{t}{2^k}\right) dt$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{2^k} g'\left(\frac{t}{2^k}\right) dt$$

(par théo. de continuité et d'intégration sous CU de $\sum g_k$ sur $[x, 2x]$)

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[g\left(\frac{t}{2^k}\right)\right]_{t=x}^{t=2x}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[g\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - g\left(\frac{x}{2^k}\right)\right]$$

(par télescopage)

$$= g(x) - \lim_{k \to +\infty} g\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

$$= g(x) - g(0) = g(x).$$

- On a montré $\varphi(f) = g$. donc $g \in \operatorname{Im}\varphi$

Finalement. $\operatorname{Im}\varphi = F$.