$\boxed{21}$ 47

① $f_n(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} -x^{2n+1} \ln(x)$ $\qquad f_n(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$

$f_n(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{(x-1)(x+1)} \sim \dfrac{\ln x}{2(x-1)}$ $\qquad f_n(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} \dfrac{1}{2}$

f_n est prolongeable par continuité sur $[0,1]$.

---

② • $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{2n+1} \times \frac{\ln x}{x-1} \times \frac{1}{x+1}\, dx \leqslant \int_0^1 -\ln x \times x^{2n+1} \underset{\substack{\text{IPP} \\ (\dots)}}{=} \frac{1}{(2n+2)^2}$.

$\boxed{I_n \longrightarrow 0}$

• Met 2 : $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{-\ln x}{x-1}$ intégrable sur $]0,1[$, $\quad f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Theo. de Convergence Dominée $\rightarrow$ $I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

---

③ $\forall x \in]0,1[$, $\dfrac{1}{1-x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (x^2)^k$

$I_n = \displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\left(-x^{2n+1} \ln x \times x^{2k}\right)}_{g_n(x)}$

g_n est intégrable sur $]0,1[$, $\quad \sum g_n = f_n$ est cpm sur $]0,1[$

$\displaystyle\int_0^1 |g_n| = -\int_0^1 x^{2n+1+2k} \ln x\, dx = -\left[\ln x \times \frac{x^{2n+2k+2}}{2n+2k+2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{x} \times \frac{x^{2n+2k+2}}{2n+2k+2}\, dx$

(le crochet converge)

$= + \dfrac{1}{(2n+2k+2)^2} \sim + \dfrac{1}{4k^2}$

$\sum \int_0^1 |g_n|$ Converge.

Theo. d'intégration terme à terme

$\downarrow$

$I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n+2k+1} \ln x\, dx =$

$\underset{\substack{\text{IPP} \\ (\dots)}}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+2k+2)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+k+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

$\boxed{22}$ (1) Met 1 : • $f_n(x) = \dfrac{e^{x+n} - e^{-x-n}}{e^{x+n} + e^{-x-n}} - \dfrac{e^{n} - e^{-n}}{e^{n} + e^{-n}}$

$$= \frac{2e^{x} + 2e^{-x}}{(e^{n}+e^{-n})(e^{x+n}+e^{-x-n})} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2e^{x}+2e^{-x}}{e^{2n}}$$

$\sum f_n(x)$ Converge. $\boxed{S \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+}$

• f_n est $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x) = 1$

$\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+} = 1 - \operatorname{th}(n) = 1 - \dfrac{e^{n}-e^{-n}}{e^{n}+e^{-n}} = \dfrac{2e^{-n}}{e^{n}+e^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2e^{-2n}$

$\sum f_n$ $\underset{(CU)}{CN}$ sur $\mathbb{R}_+$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$

Theo. de Continuité $\longrightarrow$ $\boxed{S \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$

Met 2 : • $f_n(x) = \operatorname{th}'(c_{n,x}) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(c_{n,x})}$ avec $n \leqslant c_{n,x} \leqslant n+x$.

$c_{n,x} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$

$\leqslant \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(n)}$

$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(n)} \sim \dfrac{4}{e^{2n}}$ donc $\boxed{\sum f_n(x) \text{ converge}}$

• $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+} \leqslant \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(n)}$ $\quad \sum f_n$ CN sur $\mathbb{R}_+$ ...

• $\boxed{S \text{ est } \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}_+}$ (somme d'une série de f° strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$)

---

(2) Met 1 $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1 - \operatorname{th}(n)$. $\quad \sum f_n$ CU sur $\mathbb{R}_+$

Theo de la double limite $\longrightarrow$ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (1 - \operatorname{th}(n))}$.

22 Met 2 49

Rq: $S(x+1) - S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \text{th}(x+n+1) - \text{th}(n+x) = 1 - \text{th}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} 2e$

$\sum S(n+1) - S(n)$ converge, donc $(S(n))$ converge.

$\lim_{n \to +\infty} S(n) = \lim_{x \to +\infty} S(x) = S(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} S(n+1) - S(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - \text{th}(n))$

$\boxed{23}$ ① Soit $x \in \mathbb{R}$.

$t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (sur $\mathbb{R}_+$ si $x \geq 1$)

En 0^+ : $t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$

$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ converge $\Leftrightarrow 1-x<1 \Leftrightarrow x>0$ (comparaison pour des f° positives et critère de Riemann)

En $+\infty$: $t^{x-1}e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

$\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge

On a montré : $\Gamma(x)$ existe $\Leftrightarrow x>0$.

Ens. de définition : $\boxed{\mathcal{D}_\Gamma = \mathbb{R}_+^*}$

---

② $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$t \longmapsto e^{-xt^n} g(t)$ est continue sur $[0,1]$,

donc $f(x)$ existe.

---

③ $g(0) \neq 0$. • Soit $x>0$.

Changement de variable $u = t^n x$ ($t \longmapsto t^n x$ est C^1, strict $\uparrow$, bijective de $[0,1]$ dans $[0,x]$)

$du = nx\, t^{n-1}\, dt$

$t = \left(\frac{u}{x}\right)^{1/n}$

$$f(x) = \int_0^x e^{-u} g\left(\left(\frac{u}{x}\right)^{1/n}\right)\frac{du}{nx} \times \frac{1}{\left(\frac{u}{x}\right)^{\frac{n-1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{n x^{1/n}} \underbrace{\int_0^x e^{-u} \times u^{\frac{1}{n}-1} \times g\left(\frac{u^{1/n}}{x^{1/n}}\right) du}_{F(x)}$$

- $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,u)\,du$, en posant $f(x,u) = \begin{cases} e^{-u} u^{\frac{1}{n}-1} g\left(\left(\frac{u}{x}\right)^{1/n}\right) & \text{si } u \leq x \\ 0 & \text{si } u > x. \end{cases}$

- $\square$ Pour $x > 0$, $u \longmapsto f(x,u)$ est cpm sur $\mathbb{R}_+^*$.

- $\square$ Pour $u > 0$: Pour $x \geq u$, $f(x,u) = e^{-u} u^{1/n-1} g\left(\left(\frac{u}{x}\right)^{1/n}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} e^{-u} u^{1/n-1} g(0)$

- $\square$ Pour $u > 0$, $x > 0$: si $x \geq u$: $\left(\frac{u}{x}\right)^{1/n} \in [0,1]$

  donc $|f(x,u)| \leq e^{-u} u^{\frac{1}{n}-1} \|g\|_\infty^{[0,1]} = \varphi(u)$

  si $x < u$: $|f(x,u)| = 0 \leq \varphi(u)$.

  φ est intégrable sur $]0,+\infty[$. (cf Q1)

- $\square$ Theo de CD : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{1/n-1} g(0) = g(0)\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \neq 0$

On a montré $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n x^{1/n}} g(0)\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$

24 $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\frac{a_n}{n!} = O\left(\frac{1}{n!}\right)$

Or la SE $\sum \frac{x^n}{n!}$ est de rayon $+\infty$ (série exp)

donc la SE $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ est de rayon $+\infty$. | f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) $\frac{f(x)}{e^{+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{a_n}{n!} x^n e^{-x}}_{f_n(x)}$.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$

- f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n' : x \longmapsto x^{n-1} e^{-x}(n-x)$

$\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = f_n(n) = \frac{a_n}{n!} n^n e^{-n} = \frac{a_n}{\sqrt{2\pi n}}$

Or $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ converge,

donc $\sum f_n$ CN donc CU sur $\mathbb{R}$.

- Théo de la double limite : $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{e^{+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$

$f(x) \underset{+\infty}{=} o(e^x)$

25 ① • $t \longmapsto \frac{\ln t}{t-1}$ est continue sur $]0,1[$.

• $\frac{\ln t}{t-1} \xrightarrow[t \to 1^-]{} 1$, $t \mapsto \frac{\ln t}{t-1}$ est prolongeable par continuité en 1.

• $\frac{\ln t}{t-1} \underset{t \to 0^+}{\sim} -\ln t$.

Or ln est intégrable en 0, donc, par comparaison,
$t \longmapsto \frac{\ln t}{t-1}$ est intégrable en 0.

I converge.

• $\forall t \in]0,1[, \ \frac{1}{t-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$

$$I = -\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln t \, dt$$

(sous réserve de justification de l'interversion)

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^n \ln t \, dt$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{t} \, dt \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$ (CT $n' = n+1$)

• Justification de l'interversion :

• Pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n : t \longmapsto t^n \ln t$ est continue par morceaux sur $]0,1[$

$\sum g_n$ CS et $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n : x \longmapsto \frac{\ln t}{t-1}$

• $\int_0^1 |g_n(t)| \, dt = -\int_0^1 t^n \ln t \, dt = \frac{1}{(n+1)^2}$

$\sum \int_0^1 |g_n|$ converge.

Le théo d'intégration terme à terme justifie l'interversion.

② Comparaison série. intégrale : Soit $x \in [0,1[$ $\ln x < 0$.

• Posons $g_x : t \longmapsto f(x^t) = f(e^{t\ln x})$

g_x est continue et $\downarrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$ $(t > 0 \Rightarrow t\ln x < 0 \Rightarrow e^{t\ln x} \in]0,1[)$

De plus : étudions $\int_0^{+\infty} g_x(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(x^t)\,dt$

Par CV : $u = x^t$, $du = \ln x \times x^t\,dt$

$(t \longmapsto x^t$ est C^1, bijectif de $[1,+\infty[$ dans $]0,1]$, strict $\downarrow)$

$\int_0^{+\infty} f(x^t)\,dt$ a même nature que $\int_1^0 f(u) \times \frac{du}{\ln x \times u}$, qui converge,

donc $\boxed{\int_0^{+\infty} f(x^t)\,dt = -\frac{1}{\ln x}\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,du.}$

• Pour $k \in \mathbb{N}^*$: $\int_k^{k+1} g_x(t)\,dt \leq g_x(k) \leq \int_{k-1}^{k} g_x(t)\,dt$

$$\frac{1}{|\ln x|}\int_{x^{n+1}}^{x} \frac{f(u)}{u}\,du = \int_1^{n+1} g_x(t)\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} g_x(k) \leq \int_0^n g_x(t)\,dt = \frac{1}{|\ln x|}\int_{x^n}^1 \frac{f(u)}{u}\,du$$

$$\leq \frac{1}{|\ln x|}\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,du.$$

$\boxed{\text{Supposons de plus } f \geq 0 \text{ sur } [0,1[.}$

$\left(\sum_{k=1}^{n} g_x(k)\right)_n$ est majorée et $\uparrow$, donc converge

$$\frac{1}{\ln x}\int_0^x \frac{f(u)}{u}\,du \leq \sum_{k=1}^{+\infty} g_x(k) \leq \frac{1}{|\ln x|}\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,du$$

De plus :
Quand $n \to +\infty$

$$\frac{x-1}{\ln x}\int_0^x \frac{f(u)}{u}\,du \leq (1-x)\sum_{k=1}^{+\infty} f(x^k) \leq \frac{x-1}{\ln x}\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,du$$

Quand $x \to 1^-$: $\frac{x-1}{\ln x} \to 1$ et $\int_0^x \frac{f(u)}{u}\,du \to \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,du$,

Par encadrement : $(1-x)\sum_{k=1}^{+\infty} f(x^k) \xrightarrow[x \to 1^-]{} \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,du$

③ • Posons $f : x \longmapsto -\ln(1-x)$

f est continue, positive, $\uparrow$ sur $[0,1[$.

$\int_0^1 \frac{f(u)}{u} du = -\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} du$ a même nature que $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt$

(CV $t = 1-u$)

En 0^+ : $\frac{\ln t}{t-1} \sim \ln t$ intégrable en 0^+

En 1^- : $\frac{\ln t}{t-1} \longrightarrow 1$.

Ainsi : $\boxed{\int_0^1 \frac{f(u)}{u} du \text{ converge.}}$

• Q2 $\rightarrow$ $-\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1-x^k)$ converge

et $-(1-x) \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1-x^k) \xrightarrow[x \to 1^-]{} \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = I$.

$\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1-x^k) \underset{x \to 1^-}{\sim} \frac{I}{x-1} \left(= \frac{\pi^2}{6(x-1)} \right)$

$\boxed{26}$ ① Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = (-1)^n \ln n$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

d'Alembert : la SE $\sum a_n x^n$ a pour rayon $R = 1$.

② • Pour $x \in]-1, 1[$:

$$g(x) = (1+x) \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln n \, x^n$$ (le terme d'ordre 1 est nul)

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln n \, x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln n \, x^{n+1}$$ CI $n' = n+1$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln n \, x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln(n-1) \, x^n$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \left(\ln n - \ln(n-1)\right) x^n.$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) x^n$$

$\left(-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)_{n\geq 2}$ est positive, ↓, et converge vers 0.

Critère spécial des séries alternées :

Pour $x \in [0,1[$, $\left|R_{n-1}(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) x^k\right| \leq -\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)|x|^n$
$\leq -\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$

$$\|R_{n-1}\|_\infty^{[0,1[} \leq -\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\sum_n (-1)^{n+1} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) x^n$ CU sur $[0,1[$.

Pour $n \geq 2$: $(-1)^{n+1} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) x^n \xrightarrow[x\to 1^-]{} (-1)^{n+1} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$

Théo de la double limite : $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = S$ 57

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{2} S.$

$\boxed{27}$ 1 Posons $a_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$

- $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(2n+1)(2n+2)}{4 \times (n+1)^2} = \dfrac{2n+1}{2(n+1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Règle de d'Alembert $\longrightarrow$ Rayon de Convergence $R = 1$

- Met 1 : Formule de Stirling : $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \times \sqrt{2\pi n}$

$(2n)! \sim \left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n} \times 2\sqrt{\pi n}$

$$a_n \sim \frac{1}{4^n} \times \frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}} \times 2\sqrt{\pi n} \times \left(\frac{e}{n}\right)^{2n} \times \frac{1}{2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Met 2 Raabe-Duhamel.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}} = \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Posons $V_n = \ln(n^\alpha a_n)$

$$V_{n+1} - V_n = \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $V_n = \ln(\sqrt{n}\, a_n)$, $V_{n+1} - V_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\sum V_{n+1} - V_n$ Converge. (V_n) Converge

$\sqrt{n}\, a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} C > 0$ $\qquad a_n \sim \dfrac{C}{\sqrt{n}}$

- $\sum a_n$ diverge. $f = x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ n'est pas défini en 1

- $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} < 1$, $a_n \geqslant 0$, $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $\left(a_n \sim \dfrac{C}{\sqrt{n}}\right)$

Critère Spécial des SA $\rightarrow$ $\sum (-1)^n a_n$ Converge. f est déf. en -1

$\mathcal{D}_f = [-1, 1[$

- Calcul de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-1,1[$:

Met 1 : f est C^∞ sur $]-1,1[$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$(2n+2) a_{n+1} = (2n+1) a_n.$$

$$2(n+1) a_{n+1} = 2n a_n + a_n$$

$$2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$2 f'(x) = 2x f'(x) + f(x)$$

f est solution sur $]-1,1[$ de (E) : $y' = \dfrac{y}{2(1-x)}$

$$f : x \longmapsto \lambda \times e^{-\frac{1}{2}\ln(1-x)} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-x}}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$f(0) = a_0 = 1$ donc $\lambda = 1$. $\boxed{f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}}$

Met 2

$$a_n = \frac{(2n)!}{4^n \times n!^2} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k) \times \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{4^n \, n!^2}$$

$$= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{2^n \, n!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)}{n!}.$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)}{n!} x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right)}{n!} (-x)^n = (1+(-x))^{-\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x}}}$$

qu'on peut noter $\binom{-\frac{1}{2}}{n}$

• Calcul de $f(x)$ en $x = -1$:

Pour $x \in [-1,0]$: $|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n x^n\right| \leq a_{n+1}|x|^{n+1} \leq a_{n+1}$

$\|R_n\|_\infty^{[-1,0]} \leq a_{n+1} \; (\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0)$

$\sum u_n$ CU sur $[-1,0]$, u_n est continue sur $[-1,0]$
($u_n : x \mapsto a_n x^n$)

Théo. de Continuité $\rightarrow$ f est Continue sur $[-1,0]$.

$f(-1) = \lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\boxed{\forall x \in D_f =]-1,1],\; f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.}$

---

② Posons $F = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^2,\; \sum_{k=0}^{n} x_k = n\}$

$F' = \{(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{N}^{*2},\; \sum_{k=0}^{n} y_k = 2n+1\}$ (en posant $y_k = x_k + 1$)

$[F] = [F']$

$$\underbrace{1 + \dots + 1}_{y_0 \text{ fois}} \oplus_{i_1} \dots \oplus_{i_n} \underbrace{1 + \dots + 1}_{y_n \text{ fois}} = 2n+1$$

Choisir un élément de F revient à choisir n emplacements pour les $\oplus$ séparant les entiers y_k parmi les $2n$ signes $+$ de la somme des 1.

$\rightarrow \binom{2n}{n}$ possibilités

$\boxed{p_n = \text{card}(F') = \binom{2n}{n}}$

Rq : Posons $G = \{\{i_1; \dots; i_n\},\; (i_1, \dots, i_n) \in [\![1, 2n]\!]^n,\; i_1 < \dots < i_n\}$ $= \mathcal{P}_n([\![1,2n]\!])$

$\varphi : G \rightarrow F'$ est une bijection

$\{i_1; \dots; i_n\} \mapsto (y_0, \dots, y_n)$ avec $y_0 = i_1$
$i_1 < \dots < i_n$

$y_1 = i_2 - i_1$
$\vdots$
$y_k = i_{k+1} - i_k$
$y_{n-1} = i_n - i_{n-1}$
$y_n = 2n+1 - i_n$.

$\text{card}(F') = \text{card}(G) = \binom{2n}{n}$

28 ① $\bullet$ $[U_{n+1}]_i = \mathbb{P}(X_{n+1} = i)$ Pour $i \in [\![0, N]\!]$

$$= \sum_{j=0}^{N} \mathbb{P}(X_n = j) \times \mathbb{P}_{X_n = j}(X_{n+1} = i)$$

Sachant $(X_n = j)$: $X_{n+1} \sim \mathcal{B}(j, p)$

$$\boxed{\mathbb{P}_{X_n = j}(X_{n+1} = i) = \binom{j}{i} p^i (1-p)^{j-i} = a_{ij}}$$

$$[U_{n+1}]_i = \sum_{j=0}^{N} a_{ij} [U_n]_j$$

$\boxed{U_{n+1} = A U_n}$ en posant $A = (a_{ij})_{0 \leq i,j \leq N} \in T_N^+(\mathbb{R})$

$\bullet$ Par réc. immédiate : $U_n = A^n U_0$, avec $U_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_0 = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_0 = N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(X_0 = N)$

Pour $i \in [\![0, N]\!]$: $\underbrace{[U_n]_i}_{= \mathbb{P}(X_n = i)} = [A^n]_{i,N}$

$\bullet$ $A \in T_N^+(\mathbb{R})$

$\forall i \in [\![1, N]\!]$, $a_{ii} = p^i$

A a n valeurs propres distinctes, donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

---

② $\bullet$ Pour $j \in [\![0, N]\!]$: $\varphi(X^j) = (pX + q)^j$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{j}{i} p^i q^{j-i} X^i$$

$M = \mathrm{mat}(\varphi) = (m_{ij})_{0 \leq i,j \leq N}$ en posant $m_{i,j} = \binom{j}{i} p^i q^{j-i}$.

$B = (1 \text{——} X^N)$

$\bullet$ $M = A$.

$A^n = M^n = \mathrm{mat}_B(\varphi^n)$

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ (...) : $\varphi^n : P \longmapsto P\left(p^n X + \sum_{k=0}^{n-1} p^k q\right)$

$$= P(p^n X + 1 - p^n)$$

Pour $j \in [\![0,N]\!]$: $\varphi^n(X^j) = (p^n X + 1 - p^n)^j$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{j}{i} p^{ni} X^i (1-p^n)^{j-i}$$

$$\forall i \in [\![0,N]\!],\ [M^n]_{i,j} = \binom{j}{i} p^{ni} (1-p^n)^{j-i}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![0,N]\!],\ \mathbb{P}(X_n = i) = [M^n]_{i,N} = \binom{N}{i} p^{ni} (1-p^n)^{N-i}}$$

③ • $X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} Z_k$, avec $(Z_k)_k$ IID $\sim \mathcal{B}(p)$.

Pour $t \in [\![-1,1]\!]$:

$$\varphi_{X_{n+1}}(t) = \mathbb{E}(t^{X_{n+1}}) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{N} t^{X_{n+1}} \times \mathbb{1}_{(X_n=j)}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \mathbb{E}\left(t^{\sum_{k=1}^{j} Z_k} \times \mathbb{1}_{(X_n=j)}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \mathbb{E}\left(t^{\sum_{k=1}^{j} Z_k}\right) \times \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(X_n=j)}\right) \quad \text{(par indépendance)}$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \mathbb{P}(X_n=j) \times \mathbb{E}(t^{Z_1})^j \qquad \left(\mathbb{E}(t^{Z_1}) = \varphi_{Z_1}(t)\right)$$

$$= \varphi_{X_n}(\varphi_{Z_1}(t))$$

$$\varphi_{X_n} = \varphi_{X_{n-1}} \circ \varphi_{Z_1} = \dots = \varphi_{X_0} \circ \varphi_{Z_1}^{\circ n}.$$

Or $X_0 = N$, $\varphi_{X_0} : t \mapsto t^N$, $\varphi_{Z_1} : t \mapsto \mathbb{E}(t^{Z_1}) = pt + q$

• On montre par récurrence : $\varphi_{Z_1}^{\circ n} : t \mapsto p^n t + 1 - p^n$

Ainsi : $\varphi_{X_n}(t) = (p^n t + 1 - p^n)^N$

$$\forall j \in [\![0,N]\!],\ \mathbb{P}(X_n = j) = \frac{1}{j!} \varphi_{X_n}^{(j)}(0) = \frac{N \dots (N-j+1)}{j!} (p^n)^j \times (1-p^n)^{N-j}$$

$$= \binom{N}{j} p^{nj} (1-p^n)^{N-j}$$

$\boxed{29}$ (1) (V1) Par dénombrement.

(V2) $(X+1)^{2n} = (X+1)^n (X+1)^n$

Or $P = (X+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$

donc $P^2 = \sum_{j=0}^{2n} a_j X^j$, avec $a_j = \sum_{k=0}^{j} [P]_k [P]_{j-k}$

$= \sum_{k=0}^{j} \binom{n}{k}\binom{n}{j-k}$

le Coef. d'ordre n est : $[P^2]_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

Or ______ de $(X+1)^{2n}$ est $\binom{2n}{n}$

donc $\boxed{\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2}$

---

(2) Posons P_k : "PILE au lancer k", F_k : "Face au lancer k"

$A_{2n} = \bigsqcup_{\substack{I \subset [\![1, 2n]\!] \\ \mathrm{card}(I) = n}} \left(\bigcap_{k \in I} P_k\right) \cap \left(\bigcap_{k \in [\![1,2n]\!] \setminus I} F_k\right)$ union incompatible, σ-additivité.

$\mathbb{P}(A_{2n}) = \sum_{\substack{I \subset [\![1, 2n]\!] \\ \mathrm{card}(I) = n}} \frac{1}{2^{2n}}$ ($\binom{2n}{n}$ termes)

$\boxed{p_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}}$

$\boxed{\mathbb{P}(A_{2n+1}) = 0 = p_{2n+1}}$

---

(3) $\frac{p_{2n+2}}{p_{2n}} = \frac{1}{4} \times \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}}$. Posons R le rayon cherché.

$= \frac{1}{4} \times \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \sim 1$

La SE $\sum p_{2n} x^n$ est de rayon 1 (d'Alembert)

Or $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{2n} (x^2)^n$

$|x| < 1 \Rightarrow |x^2| < 1 \Rightarrow \sum p_n x^n = \sum p_{2n}(x^2)^n$ converge donc $R \geq 1$ (*)

(*) $|x| > 1 \Rightarrow |x^2| > 1$

$\Rightarrow \sum p_n x^n$ diverge

donc $R \leq 1$

Ainsi $\boxed{R = 1}$

30 ① $N \sim \mathcal{G}(p)$.

$(N, X)(\Omega) = \{(j,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq j\}$

<u>Pour $(j,k) \in (N,X)(\Omega)$</u> : $P(N=j, X=k) = \binom{j}{k} p^{k+1} (1-p)^{2j-k-1}$

<u>loi de X sachant $(N=j)$</u> : $\mathcal{B}(j,p)$

② $X(\Omega) = \mathbb{N}$

<u>Pour $k \in \mathbb{N}^*$</u> : $P(X=k) = \sum_{j=k}^{+\infty} \binom{j}{k} p^{k+1} (1-p)^{2j-k-1}$

$$= \sum_{j=k}^{+\infty} \binom{j}{k} \left((1-p)^2\right)^{j-k} \times p^{k+1} \times (1-p)^{k-1}$$

$$\underset{(\dots)}{=} \left(\frac{1}{1-(1-p)^2}\right)^{k+1} \times p^{k+1} \times (1-p)^{k-1} = \left(\frac{1-p}{2-p}\right)^{k-1} \times \frac{1}{(2-p)^2}.$$

$P(X=0) = \sum_{j=1}^{+\infty} p(1-p)^{2j-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} p(1-p)^{2j+1} = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}$.

③ • $U(\Omega) = \{0;1\}$, $V(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $UV(\Omega) = \mathbb{N}$.

$P(UV=0) = P(U=0) = 1-\lambda$

<u>Pour $k \in \mathbb{N}^*$</u> : $P(VU=k) = P(U=1) \times P(V=k)$

$$= (1-\lambda)^{k-1} \times \lambda^2.$$

Pour $\lambda = \frac{1}{2-p}$; $1-\lambda = \frac{1-p}{2-p}$. $VU \sim X$.

④ • $E(X) = E(UV) = E(U) \times E(V) = \lambda \times \frac{1}{\lambda} = 1$.

• $E(X^2) = E(UV^2) = E(U) \times E(V^2) = \lambda(1-\lambda) \times \left(\frac{1-\lambda}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\right) = \frac{(1-\lambda)(2-\lambda)}{\lambda}$

• $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$= \frac{(1-p)(3-2p)}{2-p} - 1$.

$= \frac{(1-p)(3-2p)}{2-p}$