31 $\odot$ Soit $M \in \mathbb{C}[A]$ $\quad M = P(A)$, avec $P \in \mathbb{C}[X]$

$MA = AM$

$M \in \mathcal{C}(A)$

$\odot$ Soit $M \in \mathcal{C}(A)$. $\quad AM = MA$.

Disposons de $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \mid \operatorname{Ker} A^{n-1}$.

- Montrons que $\mathcal{B} = (A^k x)_{0 \leq k \leq n-1}$ est libre.

Soit $(\lambda_0 \text{---} \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k A^k x = 0_{n,1}$.

Montrons par récurrence forte sur $k \in [\![0, n-1]\!]$: $\lambda_k = 0$

□ $A^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k A^k x\right) = 0 = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \underbrace{A^{k+n-1} x}_{0 \text{ si } k \geq 1} = \underbrace{\lambda_0 A^{n-1} x}_{\neq 0_{n,1}}$

(si $n \geq 2$)

donc $\lambda_0 = 0$

□ Supposons $\lambda_0 = \dots = \lambda_{j-1} = 0$ pour $j \in [\![1, n-1]\!]$

$\sum_{k=j}^{n} \lambda_k A^k x = 0$

$A^{n-1-j}\left(\sum_{k=j}^{n} \lambda_k A^k x\right) = 0 = \sum_{k=j}^{n} \lambda_k \underbrace{A^{n-1-j+k} x}_{0 \text{ si } k \geq j+1} = 0 = \underbrace{\lambda_j A^{n-1} x}_{\neq 0}$

donc $\lambda_j = 0$

□ On a montré par récurrence : $\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$

$\mathcal{B}$ est libre et de cardinal n, donc est 1 $\boxed{\text{base de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}).}$

- $\exists (\alpha_0 - \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, $Mx = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k x$. Montrons $M = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k$

On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$: $MA^k = A^k M$.

Pour $j \in [\![0, n-1]\!]$: $MA^j x = A^j M x = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^{j+k} x = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k . A^j x$

M et $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k$ coïncident sur $\mathcal{B}$, donc $M = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k \in \mathbb{C}[A]$.

$\odot$ On a montré $\boxed{\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}[A]}$

$\boxed{32}$ • $X^q - 1$ est annulateur de A, scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. 66

• $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$, avec $P \in GL_n(\mathbb{C})$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i^q = 1$, $\lambda_i \in \mathbb{U}_q$.

Pour $k \in [\![1,q]\!]$: $P^{-1}A^kP = \mathrm{diag}(\lambda_i^k)_{1 \leq i \leq n}$.

$$\mathrm{tr}\,A^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$$

• $$\sum_{k=1}^{q} \mathrm{tr}\,A^k = \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{k=1}^{q} \lambda_i^k}_{\begin{cases} q \text{ si } \lambda_i = 1 \\ \lambda_i \times \frac{1-\lambda_i^q}{1-\lambda_i} = 0 \text{ si } \lambda_i \neq 1 \end{cases}}$$

$= q \times \omega(1)$ en posant $\omega(1) = \mathrm{card}\{i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = 1\}$

$\omega(1)$ est l'ordre de 1 dans $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$

$\omega(1) = \dim \mathrm{Ker}(A - I)$ (car A est diagonalisable)

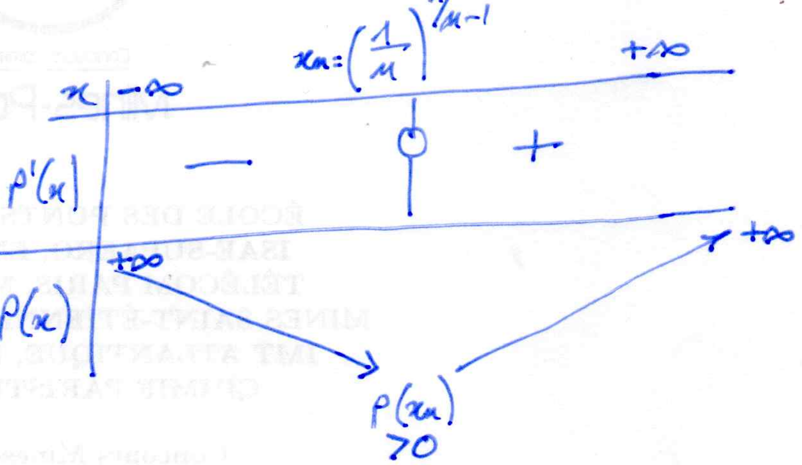
Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=1}^{q} \mathrm{tr}(A^k) = q \times \dim \mathrm{Ker}(A - I)$

$\boxed{33}$ ① • $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^n - x + 1$

$P'(x) = n x^{n-1} - 1 > 0 \iff x^{n-1} > \frac{1}{n}$

$\iff \begin{cases} x > \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n-1} & \text{si } n \text{ est pair} \\ |x| > \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n-1} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

• <u>1er cas :</u> supposons n pair.



$P(x_n) = x_n^n - x_n + 1 \geq -x_n + 1$

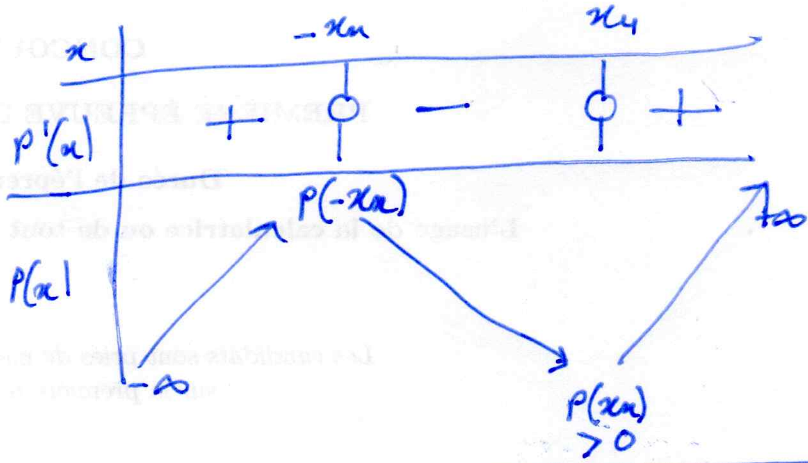
Or $x_n^{n-1} = \frac{1}{n} < 1$

<u>donc</u> $x_n < 1$

$P(x_n) > 0$

P n'a aucune racine réelle.

• <u>2ème cas :</u> Supposons n impair.



$P(-x_n) \geq P(x_n) > 0$

Par théorème de bijection (...)

$\exists !\, \alpha \in \mathbb{R},\ P(\alpha) = 0$

et $\alpha < -x_n$.

② <u>Pour $x \in \mathbb{C}$:</u> $P(x) = P'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^n = x - 1 \\ x^{n-1} = \frac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{n} x = x - 1 \\ x^{n-1} = \frac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{n}{n-1} > 1 \\ x^{n-1} = \frac{1}{n} < 1 \end{cases}$

Absurde.

P et P' n'ont aucune racine commune dans $\mathbb{C}$.

$\boxed{P \text{ est scindé à racines simples dans } \mathbb{C}[X]}$

③ V1 On calcule $\chi_A = \begin{vmatrix} X & & 0 & -1 \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & X \end{vmatrix}_n$ $\quad L_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{n} X^{i-1} L_i$

$= \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & A \\ -1 & X & & -1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & -1 & X \end{vmatrix}_n$ avec $A = 1 - X + X^n$

on développe suivant L_1

$\chi_A = (-1)^{n+1} A \times (-1)^{n-1} = A = 1 - X + X^n$

est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$

<u>donc</u> A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$

(non trigonalisable dans $\mathbb{R}$)

V2 On calcule $A^n = \cdots = A - I$.

P est annulateur de A.

34 ① • Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$: $\deg P(X+1) = \deg P \leq n$

donc $\deg \Delta(P) \leq n$.

$\Delta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$.

• On montre (...) que Δ est linéaire. Ainsi : $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$

---

② • Soit $P \in \operatorname{Ker} \Delta$ ... $P(X+1) = P(X)$

$\forall n \in \mathbb{Z},\ P(X+n) = P(X)$

$\forall n \in \mathbb{Z},\ P(n) = P(0)$

$P - P(0)$ a une infinité de racines.

$P - P(0) = 0$

P est constant

Ainsi : $\operatorname{Ker} \Delta \subset \mathbb{R}_0[X]$ (l'autre inclusion est vraie)

$\operatorname{Ker} \Delta = \mathbb{R}_0[X]$

• $\operatorname{Im} \Delta = \operatorname{vect}\left(\Delta(X^j)\right)_{0 \leq j \leq n-1}$

Or $\Delta(X^j) = (1+X)^j - X^j \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$

donc $\operatorname{Im} \Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$

De plus, par théo. du rang : $\dim \operatorname{Im} \Delta = n+1 - \dim \operatorname{Ker} \Delta = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$

Ainsi : $\operatorname{Im} \Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$

---

③ • On cherche une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B} = (P_0 - P_n)$

avec $\forall j \in [\![0, n-1]\!]$, $\Delta(P_j) = P_{j+1}$

$\Delta(P_n) = 0$.

- Disposons de $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ tq $\deg(P_0) = n$ (par exemple $P_0 = X^n$) 6/9

Pour $j \in [\![0, n-1]\!]$, posons $P_{j+1} = \Delta(P_j)$

On montre par récurrence sur $j \in [\![0, n]\!]$: $\deg P_j = n - j$.

(en effet : $\deg P_0 = n$

$\forall j \in [\![0, n-1]\!]$, $\deg(P_j) = n - j \Rightarrow P_{j+1} \in \Delta(\mathbb{R}_{n-j}[X])$
$= \mathbb{R}_{n-j-1}[X]$.

(par Q2 appliqué à $\Delta|_{\mathbb{R}_{n-j}[X]}$))

$\mathcal{B} = (P_0 - P_n)$ est échelonnée en degré, donc libre,

et de cardinal $n+1$, donc est 1 base de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

---

(4) Posons $P = X^d \in \mathbb{R}_d[X]$

$$\sum_{k=0}^{n} k^d = \sum_{k=0}^{n} P(k)$$

$= \sum_{k=0}^{n} \Delta(R)(k)$ en disposant de $R \in \mathbb{R}_{d+1}[X]$ tq $\Delta(R) = P$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left[R(k+1) - R(k)\right]$$

$$= R(n+1) - R(0)$$

$= \boxed{Q(n)}$ en posant $Q = R(X+1) - R(0) \in \mathbb{R}_{d+1}[X]$

De plus : $\deg Q = \deg R = d+1$ (car $\deg \Delta(R) = \deg R - 1 = d$).

---

(5) (V1) $\sum_{k=0}^{n} k^d = Q(n) \sim a_{d+1} n^{d+1}$ en écrivant $Q = \sum_{k=0}^{d+1} a_k X^k$. 70

$a_{d+1} = [Q]_{d+1}$ coef d'ordre $d+1$ de Q

$Q = R(X+1) - R(0)$

$a_{d+1} = [Q]_{d+1} = [R]_{d+1}$.

$R = a_{d+1} X^{d+1} + R_1$ avec $R_1 \in \mathbb{R}_d[X]$.

$\Delta(R) = X^d = a_{d+1} \Delta(X^{d+1}) + \underbrace{\Delta(R_1)}_{\in \mathbb{R}_{d-1}[X]}$

$= a_{d+1} \left((X+1)^{d+1} - X^{d+1} \right) + \Delta(R_1)$

Coef de X^d : $1 = a_{d+1} \times (d+1)$

$a_{d+1} = \frac{1}{d+1}$

$\sum_{k=0}^{n} k^d \sim \frac{n^{d+1}}{d+1}$

(V2) $\sum_{k=0}^{n} k^d = n^{d+1} \times \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^k}_{S_n}$

S_n est une somme de Riemann associée à $f : x \mapsto x^d$, continue sur $[0,1]$

$S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f = \frac{1}{d+1}$

donc $\sum_{k=0}^{n} k^d \sim \frac{n^{d+1}}{d+1}$

(V3) Par comparaison série-intégrale.

35 $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\deg P = n \geq 1$, P unitaire.

1) On écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $a_n = 1$

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(e^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\, d\theta}_{\alpha_k}$$

$$\alpha_k = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k=n \\ \frac{1}{i(k-n)}\left[e^{i(k-n)\theta}\right]_0^{2\pi} = 0 & \text{si } k<n. \end{cases}$$

Ainsi : $\boxed{I = \frac{1}{2\pi} \times a_n \times 2\pi = 1}$

2) Supposons : $\forall z \in \mathbb{U},\ |P(z)| < 1$

Alors : $\forall \theta \in [0, 2\pi],\ |P(e^{i\theta})| < 1$

Par stricte ↑ de l'intégrale et inégalité triangulaire :

$|I| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|\, d\theta < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\, d\theta = 1$. Absurde d'après Q1.

3) $(z_1 - z_n) \in \mathbb{C}^n$.

Posons $P = \prod_{k=1}^{n}\left(X - \frac{z_k}{2}\right)$

D'après Q2 : $\exists z \in \mathbb{U}$, $|P(z)| \geq 1$

$|2z| = 2$ et $\prod_{k=1}^{n} |2z - z_k| = 2^n \prod_{k=1}^{n}\left|z - \frac{z_k}{2}\right|$

$= 2^n |P(z)| \geq 2^n.$

$\boxed{36}$ ① Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\forall t \in [0,1]$, $\frac{1}{2} \leq \frac{1+t^2}{2} \leq \frac{1+t}{2}$

Par ↑ de l'intégrale : $\frac{1}{2^n} = \int_0^1 \frac{1}{2^n}\,dt \leq a_n \leq \int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^n dt = \left[\frac{2}{n+1}\left(\frac{1+t}{2}\right)^{n+1}\right]_0^1$

$= \frac{2}{n+1} \times \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

Or on montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $2^n \geq n+1$. $\leq \frac{2}{n+1}$

Ainsi : $\boxed{\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{2}{n+1}}$

---

② • La SE $\sum \frac{1}{n+1} z^n$ a pour rayon 1

donc, par comparaison, la SE $\sum a_n z^n$ a pour rayon $\boxed{R = 1}$

Soit $x \in]-1, 0[$.

• $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n x^n\,dt$

$= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n x^n\,dt$ (sous réserve de justification de l'interversion)

$= \int_0^1 \frac{1}{1 - x \times \frac{1+t^2}{2}}\,dt$ $\left(\forall t \in [0,1],\ \left|x \times \frac{1+t^2}{2}\right| \leq |x| < 1\right)$

$= 2\int_0^1 \frac{dt}{2 - x - xt^2}$

$= \frac{2}{2-x}\int_0^1 \frac{dt}{1 + \frac{x}{x-2}t^2}$

$= \frac{2}{2-x}\sqrt{\frac{x-2}{x}} \times \int_0^1 \frac{\sqrt{\frac{x}{x-2}}}{1 + \left(\sqrt{\frac{x}{x-2}}\,t\right)^2}\,dt$

$= \frac{2}{\sqrt{x(2-x)}}\left[\arctan \sqrt{\frac{x}{x-2}}\,t\right]_0^1 = \boxed{\frac{2}{\sqrt{x(2-x)}} \arctan \sqrt{\frac{x}{x-2}}}$

- Justification de l'intervertion :

Posons $f_n : t \longmapsto \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n x^n$, continue sur $[0,1]$.

$\forall t \in [0,1]$, $|f_n(t)| \leq |x|^n \leq 1$

$\|f_n\|_\infty^{[0,1]} \leq |x|^n$ et $|x|<1$

$\sum f_n$ CN sur $[0,1]$ donc CU.

Ainsi : $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[0,1]$

et $\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n$.

$\boxed{37}$ (1) • $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ est continue sur $]0,1[$.

• En 0^+ : $\frac{t-1}{\ln t} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$, En 1^- : $\frac{t-1}{\ln t} \longrightarrow 1$.

$t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$

donc intégrable sur $]0,1[$.

I existe

(2) Pour $\varepsilon > 0$:

• $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt$ 　　(CV : $t = e^{-u}$, $dt = -e^{-u} du$, $u = -\ln t$

$= \int_{+\infty}^{0} \frac{e^{-u}-1}{-u} \times (-e^{-u} du)$ 　　$u \mapsto e^{-u}$ est C^1, strict $\downarrow$, bijective de $]0,+\infty[$ dans $]0,1[$)

$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2u}-e^{-u}}{u} du$

• Pour $\varepsilon > 0$: $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2u}-e^{-u}}{u} du = \int_0^{e^{-\varepsilon}} \frac{t-1}{\ln t} dt$

$= \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2u}}{u} du - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$

$= \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-v}}{v} dv - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ 　　(CV $v = 2u$)

$= \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du.$

• Ainsi, quand $\varepsilon \to 0^+$, $e^{-\varepsilon} \longrightarrow 1^-$

donc $\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du \longrightarrow \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt.$

$\boxed{38}$ $x > 0$.

① $\ln(u_n) - \ln(u_{n-1}) = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)$

$= \ln\left(\frac{n}{x}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$

Or $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$\frac{n}{x}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = 1 - \frac{x}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\ln(u_n) - \ln(u_{n-1}) = \ln\left(1 - \frac{x}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$= -\frac{x}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{x}{2n}$

$\sum \ln(u_n) - \ln(u_{n-1})$ diverge

donc (...) $(\ln(u_n))_n$ diverge et est $\downarrow$ ($\ln u_n - \ln(u_{n-1}) < 0$ pour n grand)

donc $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

$u_n \longrightarrow 0$

② $\ln(u_n) - \ln(u_{n-1}) - \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -\frac{x}{2n} - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$= O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ en posant $\alpha = -\frac{x}{2}$

(...) $\sum \ln(u_n) - \ln(u_{n-1}) - \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ converge.

③ $\sum \ln(u_n) - \alpha\ln(n+1) - (\ln(u_{n-1}) - \alpha\ln n)$ converge

donc $(\ln(u_n) - \alpha\ln(n+1))_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$

$\ln\left(\frac{u_n}{(n+1)^\alpha}\right) \longrightarrow \ell$

$\frac{u_n}{(n+1)^\alpha} \longrightarrow e^\ell$ donc $u_n \sim e^\ell (n+1)^\alpha \sim e^\ell n^\alpha = \frac{e^\ell}{n^{\frac{x}{2}}}$. $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow x > 2$.

$\boxed{39}$ • $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\quad \dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$

$$\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} - \frac{1}{k} \leq 0$$

$\left(\frac{1}{k}\right)_k$ converge, donc $\sum \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$ converge,

donc, par comparaison de séries à TP : $\displaystyle\sum_k \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt - \frac{1}{k}$ converge

$$\left(\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ converge.}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} + \gamma + o(1)$$

$$= \ln(n+1) + \gamma + o(1)$$

$$= \ln(n) + \gamma + o(1) \sim \ln(n)$$

Or $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \longrightarrow 1$.

donc (d'Alembert) la SE $\sum \ln(n) x^n$ a pour rayon 1

donc la SE $\sum H_n x^n$ ___

(la série diverge grossièrement en 1 et -1)

• Pour $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} H_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^n}{k} \quad \text{(Theo de sommation par paquet pour les familles sommables)}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{n=k}^{+\infty} x^n\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \times \frac{x^k}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^x t^{k-1}\,dt \overset{(*)}{=} \frac{1}{1-x} \int_0^x \sum_{k=1}^{+\infty} t^{k-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{1-x} \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

(*) Par intégration d'une SE sur son intervalle ouvert de convergence.

$\boxed{40}$ ① $S(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}}_{f(x,t)} dt$

• Pour $x \in \mathbb{R}$: $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$

En 0^+ $f(x,t) \underset{0^+}{\sim} \frac{t}{xt} = \frac{1}{x}$

$t \mapsto f(x,t)$ est prolongeable par continuité en 0^+

En $+\infty$: (si) $x>0$: $f(x,t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sin t}{e^{xt}} = O(e^{-xt})$

Or $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable en $+\infty$,

donc $t \mapsto f(x,t)$ ________________

(si) $x=0$: $t \mapsto f(x,t)$ n'est pas définie sur $]0,+\infty[$.

(si) $x<0$: $\forall t>0$, $-1 < e^{xt}-1 < 0$

$\frac{1}{1-e^{xt}} \geq 1.$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\forall t \in [2\pi n, (2n+1)\pi]$ $\sin t \geq 0$

$\frac{\sin t}{1-e^{xt}} \geq \sin t.$

$$\int_{2\pi n}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{1-e^{xt}} dt \geq \int_{2\pi n}^{(2n+1)\pi} \sin t \, dt = [-\cos t]_{2\pi n}^{(2n+1)\pi} = 2.$$

$\left(\int_{2\pi n}^{(2n+1)\pi} f(x,t)\,dt \right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

donc $\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$ diverge.

• On a montré que l'ens. de déf de S est $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour $t \geq 0$, $x \longmapsto f(x,t)$ est continue en x.

Pour $a > 0$: Domination :

$$\forall t \geq 0, \forall x \geq a, \quad |f(x,t)| \leq \frac{t}{e^{xt}-1} \leq \frac{t}{e^{at}-1} = \varphi(t)$$

$$\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} e^{-at}, \quad \varphi(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{t}{at} = \frac{1}{a}, \quad \varphi \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^*.$$

Ainsi : S est continue sur $[a, +\infty[$

(...) $\boxed{\mathbb{R}_+^*}$

(2) Soit $x > 0$

- $$S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \sin t}{1 - e^{-xt}}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xt} \sin t\, e^{-nxt}\, dt$$

$$\underset{\triangle}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{it - xt - nxt}\, dt\right)$$ sous réserve de justification de l'interversion.

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}\left[\frac{e^{it - xt(1+n)}}{i - x(n+1)}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{x(n+1) - i}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x^2 (n+1)^2 + 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2 n^2}$$

- Justification de l'interversion : Posons $f_n : t \mapsto e^{-xt} \sin t\, e^{-nxt}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$

$\sum f_n$ CS sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n : t \mapsto \frac{e^{-xt} \sin t}{1 - e^{-xt}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt \leq \int_0^{+\infty} t\,e^{-xt}e^{-nxt}\,dt$$

$$= \underbrace{\left[t\,\frac{e^{-xt(n+1)}}{-x(n+1)} \right]_0^{+\infty}}_{0} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt(n+1)}}{-x(n+1)}\,dt$$

$$= \frac{1}{x(n+1)} \left[\frac{e^{-xt(n+1)}}{-x(n+1)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x^2(n+1)^2} \sim \frac{1}{x^2 n^2}$$

Par comparaison de séries à TP : $\sum \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge.

Le théorème d'<u>intégration terme à terme</u> justifie l'interversion.

---

③ • $\forall x > 0, \quad x^2 S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{x^2}{1+n^2x^2}}_{g_n(x)}$ <u>Étude quand $x \to +\infty$:</u>

Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim_{x \to +\infty} g_n(x) = \frac{1}{n^2}$

$\forall x > 0, \quad |g_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$

$\|g_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+^*} \leq \frac{1}{n^2}$

$\sum g_n$ CN donc CU sur $\mathbb{R}_+^*$

Théo de CD : $\lim_{x \to +\infty} x^2 S(x) = \alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(= \frac{\pi^2}{6} \right)$, $\boxed{S(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{x^2}}$
