$\boxed{41}$ $X \perp\!\!\!\perp Y$, $X \sim Y$, $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$

$X+Y+1 \sim \mathcal{G}(p)$

① • $\mathbb{E}(X+Y+1) = \frac{1}{p} = 2\,\mathbb{E}(X)+1$, $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-1\right).}$

• $V(X+Y+1) = V(X+Y) = 2\,V(X)$ (car $X \perp\!\!\!\perp Y$)

$= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}$

$\boxed{V(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}\right)}$

---

② Pour $t \in [-1,1]$:

$G_{X+Y+1}(t) \underset{(\dots)}{=} \frac{pt}{1-t(1-p)} = \mathbb{E}\left(t^{X+Y+1}\right)$

$= t \times G_X(t)^2$

Si $t \in [-1,1] \setminus \{0\}$, $G_X(t) = \sqrt{\frac{p}{1-t(1-p)}}$.

De plus, G_X est continue en 0 donc $G_X(0) = \lim_{t \to 0} G_X(t) = \sqrt{p}$.

Ainsi : $\boxed{\forall t \in [-1,1],\ G_X(t) = \sqrt{\frac{p}{1-t(1-p)}}}$

---

③ $G_X(t) = (1-qt)^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt{p}$

$= \sqrt{p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right)}{n!} (-qt)^n$

$= \sqrt{p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n!} \times \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) \times (qt)^n$

$= \sqrt{p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} \frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} \times q^n t^n = \sqrt{p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^n}{2^{2n}} \times \binom{2n}{n} t^n.$

Ainsi : par unicité du DSE :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_n = n) = \sqrt{p} \times \frac{q^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n}}$

$\boxed{42}$ Soit $\omega \in \Omega$. $(A(\omega), B(\omega)) \in \mathbb{N}^*$.

(E_ω) a 2 racines complexes r_1, r_2 avec $\left| \begin{array}{l} r_1 + r_2 = 1 - A(\omega) \leq 0 \\ r_1 r_2 = B(\omega) > 0 \end{array} \right.$

Posons S_ω l'ensemble de solutions.

- 1er cas : $\Delta > 0$.

$S_\omega = \text{vect}(t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t})$.

$(r_1, r_2) \in \mathbb{R}_-^*$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{r_1 t} = \lim\limits_{t \to +\infty} e^{r_2 t} = 0$

$\forall f \in S_\omega, \ \lim\limits_{+\infty} f = 0$

- 2ème cas : $\Delta = 0$. $r_1 = r_2 = \dfrac{1 - A(\omega)}{2} < 0$ (car $r_1^2 = B(\omega) > 0$)

$S_\omega = \text{vect}(t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto t e^{r_1 t})$

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^{r_1 t} = \lim\limits_{t \to +\infty} t e^{r_1 t} = 0$

$\forall f \in S_\omega, \ \lim\limits_{+\infty} f = 0$

- 3ème cas : $\Delta < 0$ $\quad \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \end{array} = \dfrac{1 - A(\omega) \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$

$S_\omega = \text{vect}\left(t \mapsto e^{\frac{(1-A(\omega))}{2} t} e^{i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}, t \mapsto e^{\frac{1-A(\omega)}{2} t} e^{-i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}\right)$

$E = \left(\forall f \in S_\omega, \lim\limits_{+\infty} f = 0\right) \iff 1 - A(\omega) < 0$

$\iff A(\omega) \geq 2$

De plus : $A(\omega) = 1 \Rightarrow (E_\omega) : y'' + B(\omega) y = 0$

$\Rightarrow \Delta = -4B(\omega) < 0$

- Finalement $\bar{E} = (A = 1)$

$P(E) = 1 - P(A = 1)$

$= 1 - p.$

$\boxed{43}$ $(X_n)_{n \geqslant 1}$ IID $\sim \mathcal{B}(p_n)$

Posons $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - p$

$$\mathbb{P}(|Y_n| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(Y_n^2 \geqslant \varepsilon^2)$$ ($x \mapsto x^2$ est strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$)

$$\leqslant \frac{\mathbb{E}(Y_n^2)}{\varepsilon^2}$$ (Markov)

Or $\mathbb{E}(Y_n^2) = V(Y_n) + \mathbb{E}(Y_n)^2$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) - p$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} p_k(1-p_k) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k - p$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} p_k - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} p_k^2 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k - p$$

Or $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k \longrightarrow 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant p_n^2 \leqslant p_n$, donc : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\mathbb{E}(Y_n^2) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

$\boxed{44}$ $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ IID $\sim \mathcal{G}(p)$

① • $I_n(\Omega) = \mathbb{N}^*$

• Pour $k \in \mathbb{N}^*$: $(I_n > k) = \bigcap_{j=1}^{n} (X_j > k)$

$$\mathbb{P}(I_n > k) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_j > k) \quad \text{(indépendance)}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} q^k$$

$$= q^{nk} = q'^{k} \text{ en posant } q' = q^n$$

On reconnaît $\boxed{I_n \sim \mathcal{G}(1-q^n)}$

$$\left(\left(\mathbb{P}(I_n = k) = \mathbb{P}(I_n > k-1) - \mathbb{P}(I_n > k) = q'^{k-1}(1-q')\right)\right)$$

• $\boxed{\mathbb{E}(I_n) = q^n.}$

---

② • $M_n(\Omega) = \mathbb{N}^*$

• Pour $k \in \mathbb{N}^*$: $(M_n \leq k) = \bigcap_{j=1}^{n} (X_j \leq k)$

$$\mathbb{P}(M_n \leq k) = \prod_{j=1}^{n} (1-q^k) = (1-q^k)^n$$

$$\mathbb{P}(M_n = k) = \mathbb{P}(M_n \leq k) - \mathbb{P}(M_n \leq k-1)$$

$$\boxed{= (1-q^k)^n - (1-q^{k-1})^n.}$$

• $$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(M_n > k) \quad (\in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\})$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - (1-q^k)^n\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} q^{ki}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} \sum_{k=0}^{+\infty} q^{ki} \quad \text{(théo de sommation par paquets pour les familles de réels positifs)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} \frac{1}{1-q^i} < +\infty.$$

$\boxed{45}$ V1 Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$f(M) = \lambda M \iff \begin{cases} c = \lambda a = \lambda^2 b = \lambda^3 d = \lambda^4 c \\ \lambda \neq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda = 0 \\ a = b = c = d = 0 \to \text{Non} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda^4 = 1 \\ c = \lambda a = \lambda^2 b = \lambda^3 d \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} c = 0 \\ 0 = \lambda a = \lambda^2 b = \lambda^3 d \to \text{Non.} \\ \lambda \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda \in \{-1; 1; i; -i\} \\ M \in \operatorname{vect} \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ \lambda^3 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\underbrace{Sp_{\mathbb{C}}(f) = \{-1; 1; i; -i\}}$, $\forall \lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(f)$, $\dim E_\lambda(f) = 1$. f est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, non trigonalisable dans $\mathbb{R}$.

V2 Posons $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & 0 & -1 & 0 \\ -1 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 \\ 0 & -1 & 0 & X \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{4} L_i$$

$$= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & X & 0 & 0 \\ 1 & 0 & X & -1 \\ 1 & -1 & 0 & X \end{vmatrix} \quad L_i \leftarrow L_i - L_1 \text{ pour } i \text{ de } 2 \text{ à } 4$$

$$= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & X & 1 & 0 \\ 0 & 0 & X+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & X \end{vmatrix}$$

$$= (X-1)\left(X^2(X+1) + 1 + X\right)$$

$= X^4 - 1$. scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ non scindé dans $\mathbb{R}$.

ou : $A^4 = 1$

$X^4 - 1$ annule A, est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$

A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$

$Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1; 1\}$

mais $(X-1)(X+1) = X^2 - 1$ n'annule pas A

A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

46 ⊛ Recherche de CN.

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$. $\chi_B = (X-1)^2$

- A diagonalisable dans $\mathbb{C}$ $\Rightarrow A^n$ diagonalisable dans $\mathbb{C}$
$\Rightarrow A^n$ semblable à $\mathrm{diag}(1,1) = I_2$
$\Rightarrow A^n = I_2$ faux

A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

- $AA^n = A^n A$ donc $\mathrm{Ker}(A^n - I) = \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est stable par A,

donc $A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

- $\lambda \neq \mu \Rightarrow A$ diagonalisable dans $\mathbb{C}$,

donc $\lambda = \mu$.

$A^n = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$ avec $a_n \in \mathbb{C}$.

$= \begin{pmatrix} \lambda^n & a_n \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$

donc $\lambda^n = 1$ donc $\lambda \in \mathbb{U}_n$

- $\forall k, \begin{pmatrix} \lambda^k & a_k \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{k+1} & a_{k+1} \\ 0 & \lambda^{k+1} \end{pmatrix}$, donc $a_{k+1} = a\lambda^k + \lambda a_k$

$$\frac{a_{k+1}}{\lambda^{k+1}} = \frac{a}{\lambda} + \frac{a_k}{\lambda^k}$$

$\left(\frac{a_k}{\lambda^k}\right)_k$ est arithmétique de raison $\frac{a}{\lambda}$

$\frac{a_k}{\lambda^k} = 0 + k \times \frac{a}{\lambda}$, $a_k = ka\lambda^{k-1}$ $(a_0 = 0, a_1 = a)$

Or $a_n = 1 = \frac{na}{\lambda}$ $(\lambda^n = 1)$

$a = \frac{\lambda}{n}$, $A = \begin{pmatrix} \lambda & \frac{\lambda}{n} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ qui convient.

- Montrons $Sp(AB) \subset \mathbb{R}_+$.

Soit $\lambda \in Sp(AB)$. Disposons de $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, $ABX = \lambda X$

$$\underbrace{X^T BABX}_{\substack{\| \\ (BX)^T ABX \\ >0}} = \lambda \underbrace{X^T BX}_{>0 \text{ car } B \in S_n^{++}(\mathbb{R})}$$

car $B \in Gl_n(\mathbb{R})$ et $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Ainsi $\lambda > 0$.

---

② $(A, B) \in S_n^+(\mathbb{R})$.

- 1er cas : $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus Gl_n(\mathbb{R})$.

$A + B \in S_n(\mathbb{R})$

$\forall X,\ X^T(A+B)X = X^T AX + X^T BX \geq 0$

Caractérisation spectrale : $A + B \in S_n^+(\mathbb{R})$

$$\boxed{\det(A+B) \geq 0 = \max(\det A, \det B)}$$

- 2ème cas : $A \in Gl_n(\mathbb{R})$ ou $B \in Gl_n(\mathbb{R})$

sans perte de généralité, supposons $B \in Gl_n(\mathbb{R})$

$B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $A \in S_n^+(\mathbb{R})$

$\det(A+B) = \det(AB^{-1} + I_n) \times \det B$

Q1 adapté $(A \in S_n^+(\mathbb{R}), B^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R}))$: AB^{-1} est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et $Sp_{\mathbb{R}}(AB^{-1}) \subset \mathbb{R}_+$

certaines $>$ deviennent $\geq$

$P^{-1}AB^{-1}P = \text{diag}(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$ avec $P \in Gl_n(\mathbb{R})$, $(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$

$P^{-1}(AB^{-1} + I)P = \text{diag}(\lambda_i + 1)$

$\det(AB^{-1} + I) = \prod(\lambda_i + 1) \geq 1$ donc $\det(A+B) \geq \det B$ $(\det B > 0)$

Si $A \notin Gl_n(\mathbb{R})$, $\det B = \max(\det B, \det A)$ | Si $A \in Gl_n(\mathbb{R})$, d'après Q1. $\det(A+B) \geq \det A$ donc $\det(A+B) \geq \max(\det A, \det B)$

$\boxed{48}$ ① • $\cos x = x \Rightarrow x \in [-1, 1]$.

• Posons $f_1 : x \mapsto x - \cos x$, $f_1' : x \mapsto 1 + \sin x \geq 0$

$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1$

$\Leftrightarrow x \in -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

f_1 est strict $\uparrow$ sur $[-1,1]$ et continue, donc réalise 1 bij° de $[-1,1]$ sur $[f(-1), f(1)]$

$f_1(-1) = -1 - \cos(-1) < 0$, $f_1(1) = 1 - \cos(1) > 0$.

$\exists!\, \alpha \in]-1,1[$, $f_1(\alpha) = 0$ | De plus : $f_1(0) = -1 < 0$, donc $0 < \alpha$

$\underline{\cos\alpha = \alpha}$ $\quad\quad\quad\quad$ $= f_1(\alpha)$

② Supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable, telle que $f \circ f = \cos$

$(f' \circ f) \times f' = -\sin$

• $f \circ \cos = \cos \circ f = f^3$, donc $\cos(f(\alpha)) = f(\cos\alpha) = f(\alpha)$

$f(\alpha)$ est 1 point fixe de cos, donc $f(\alpha) = \alpha$.

• $(f' \circ f) \times f' = -\sin$

$f'(f(\alpha)) \times f'(\alpha) = f'(\alpha)^2 = -\sin^2\alpha \leq 0$

Or $\alpha \in]0,1[$, donc $\sin\alpha > 0$. Absurde.

$\boxed{49}$ • **Pour $x>0$:**

88

Pour $A \geq x$:

$$\int_x^A \frac{\sin t}{t}\,dt = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_x^A - \int_x^A (-\cos t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$= \underbrace{-\frac{\cos A}{A}}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{} 0} + \frac{\cos x}{x} - \int_x^A \frac{\cos t}{t^2}\,dt \qquad \text{(IPP)}$$

$\frac{\cos t}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto \frac{\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

donc $\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ converge

Par linéarité : $\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge et vaut $\frac{\cos x}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ (*)

• $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$

donc $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge.

• Pour $x \geq 0$, posons $F(x) := \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt - \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$

F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et : $\forall x \geq 0$, $F'(x) = \begin{cases} -\frac{\sin x}{x} & \text{si } x>0 \\ -1 & \text{si } x=0 \end{cases}$

• **Pour $A \geq 0$:** Par IPP

$$\int_0^A F(x)\,dx = \left[x F(x)\right]_0^A - \int_0^A x F'(x)\,dx$$

$$= AF(A) + \int_0^A \sin(x)\,dx = AF(A) - \cos A + 1.$$

(d'après (*))

$$= -A\int_A^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt + 1$$

$$= -A\left(\left[\frac{\sin t}{t^2}\right]_A^{+\infty} + \int_A^{+\infty} 2\,\frac{\sin t}{t^3}\,dt\right) + 1$$

$$= \frac{\sin A}{A} - 2A\int_A^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3}\,dt + 1.$$

Or $\left|\int_A^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3}\,dt\right| \leq \int_A^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{2}{A^2}$

donc $\int_0^{+\infty} F(x)\,dx$ converge

et vaut 1

$\boxed{50}$ (u_n) est $\downarrow$, $\sum u_n$ converge, $v_n = n(u_n - u_{n+1}) \geqslant 0$

- ((Transfo. d'Abel))

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} k u_k - \sum_{k=0}^{n} k u_{k+1} \quad k' = k+1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k u_k - \sum_{k=1}^{n+1} (k-1) u_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} u_k - (n+1) u_n$$

Or $\sum_{k=0}^{n} u_k \geqslant \sum_{k=0}^{n} u_n = (n+1) u_n$, et $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_n$ converge

donc $((n+1)u_n)_n$ est majorée,

donc $\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)_n$ est majorée et $\uparrow$ $(v_k \geqslant 0)$

donc converge

$\sum v_n$ converge

- $n u_n = n \sum_{k=n}^{+\infty} \underbrace{(u_k - u_{k+1})}_{\geqslant 0} \geqslant 0$ $(u_n \longrightarrow 0)$

$$= n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{v_k}{k} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} v_k \quad \left(k \geqslant n \Rightarrow \frac{n}{k} \leqslant 1\right)$$

Or $\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, donc $n u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$