41 $X \perp\!\!\!\perp Y$, $X \sim Y$. $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$

$X + Y + 1 \sim \mathcal{G}(p)$

① • $\mathbb{E}(X+Y+1) = \frac{1}{p} = 2\,\mathbb{E}(X) + 1$, $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - 1\right).}$

• $V(X+Y+1) = V(X+Y) = 2\,V(X)$ (car $X \perp\!\!\!\perp Y$)

$= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$ $\boxed{V(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}\right)}$

② Pour $t \in [-1,1]$:

$G_{X+Y+1}(t) \underset{(\ldots)}{=} \frac{pt}{1 - t(1-p)} = \mathbb{E}\left(t^{X+Y+1}\right)$

$= t \times G_X(t)^2$

Si $t \in [-1,1] \setminus \{0\}$, $G_X(t) = \sqrt{\frac{p}{1-t(1-p)}}$.

De plus, G_X est continue en 0 donc $G_X(0) = \lim_{t \to 0} G_X(t) = \sqrt{p}$.

Ainsi : $\boxed{\forall t \in [-1,1],\ G_X(t) = \sqrt{\frac{p}{1-t(1-p)}}}$

③ $G_X(t) = (1-qt)^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt{p}$

$= \sqrt{p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2} - k\right)}{n!} (-qt)^n$

$= \sqrt{p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n!} \times \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) \times (qt)^n$

$= \sqrt{p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} \frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} \times q^n t^n = \sqrt{p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^n}{2^{2n}} \times \binom{2n}{n} t^n.$

Ainsi : par unicité du DSE :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_n = n) = \sqrt{p} \times \frac{q^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n}}$

42 Soit $\omega \in \Omega$. $(A(\omega), B(\omega)) \in \mathbb{N}^*$.

(E_ω) a 2 racines complexes r_1, r_2 avec $\begin{cases} r_1 + r_2 = 1 - A(\omega) \leqslant 0 \\ r_1 r_2 = B(\omega) > 0 \end{cases}$

Posons S_ω l'ensemble de solutions.

- 1er cas : $\Delta > 0$.

$S_\omega = \text{vect}(t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t})$.

$(r_1, r_2) \in \mathbb{R}_-^*$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{r_1 t} = \lim\limits_{t \to +\infty} e^{r_2 t} = 0$

$\forall f \in S_\omega, \lim\limits_{+\infty} f = 0$

- 2ème cas : $\Delta = 0$, $r_1 = r_2 = \dfrac{1 - A(\omega)}{2} < 0$ (car $r_1^2 = B(\omega) > 0$)

$S_\omega = \text{vect}(t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto t e^{r_1 t})$

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^{r_1 t} = \lim\limits_{t \to +\infty} t e^{r_1 t} = 0$

$\forall f \in S_\omega, \lim\limits_{+\infty} f = 0$

- 3ème cas : $\Delta < 0$ $\quad \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} = \dfrac{1 - A(\omega) \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$

$S_\omega = \text{vect}\left(t \mapsto e^{\frac{(1-A(\omega))}{2} t} e^{i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}, t \mapsto e^{\frac{1-A(\omega)}{2} t} e^{-i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}\right)$

$E = \left(\forall f \in S_\omega, \lim\limits_{+\infty} f = 0\right) \iff 1 - A(\omega) < 0$

$\iff A(\omega) \geqslant 2$

De plus : $A(\omega) = 1 \Rightarrow (E_\omega) : y'' + B(\omega) y = 0$

$\Rightarrow \Delta = -4B(\omega) < 0$

- Finalement $\overline{E} = (A = 1)$

$\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(A = 1)$

$= 1 - p$