Préparation à l'oral

Polycopié 2 - Indications.

Les exercices corrigés en classe prioritairement ont leurs intitulés sont en majuscules.

I Mines-ponts (1h, avec 15m de préparation)

Probabilités

1 PROBABILITES.
Commencer par étudier la situation pour des bus de taille petite $n = 1, 2, 3$ (en découpant la situation suivant l'instant précédent) pour conjecturer la valeur de la probabilité.
Pour montrer cette valeur, ou bien on fait une récurrence sur n, la taille du bus, ou bien on met en relation les chemins de l'événement et ceux de son contraire.

II X-ESCPI (50 minutes sans préparation)

Algèbre

2 ALGEBRE.
Pour aller de 1 à 2 :
On applique 1 à M=0.
On cherche à montrer : $\forall M \ , \ tr(BAM) = 0$.
On applique le 1 aux matrices au carré avant de prendre leur trace.
Pour aller de 2 à 1 :
On cherche à écrire les matrices de B et de AM dans une même base.
Une base adaptée au noyau de B conviendra.
On utilise $Im(AM) \subset Im(A) \subset Ker(B)$ pour poser la forme de la matrice de AM dans cette base, puis de $AM + B$.
Un calcul de polynôme caractéristique par bloc est alors possible.

3 ALGEBRE.
On raisonne par analyse-synthèse.
Avec un polynôme annulateur, on aboutit au critère diagonalisable et aux valeurs propres possibles.
On conclut à une similitude près.

4 ALGEBRE.
On rappelle la caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisables.
On raisonne par analyse-synthèse.
Pour la CN:
On majore le rang de M.
Pour chaque rang de M possible, on explore la CS en travaillant dans une base de trigonalisation de M, et en cherchant à écrire M comme une somme de matrice de rang 1 diagonalisables.
Pour M de rang 2, on conclut ne faisant une hypothèse sur les valeurs propres de M, qui correspond à une condition sur M^2. Cette condition est ainsi suffisante.
On montre que cette condition est nécessaire.

5 ALGEBRE.
Q1 : Raisonner par CN et CS en utilisant qu'une isométrie conserve la norme et en utilisant si c'est utile pour la construction une BON.
Q2 : Se rappeler qu'on est en dimension finie, donc qu'on peut choisir la norme utilisée.
On peut se ramener à un raisonnement sur les matrices via un isomorphisme (qui est continu).
Se rappeler que l'image réciproque d'un fermé est un fermé, et qu'une application linéaire, bilinéaire en dimension finie est continue.
Se rappeler que les colonnes d'une matrice orthogonale forment une famille ON.
On peut se souvenir qu'il n'existe que 2 parties ouvertes et fermées d'un evn.

6 ALGEBRE.
Faire un pivot par blocs pour se ramener à une matrice triangulaire par blocs, OU étudier $dim(Ker(M))$ en découpant les vecteurs colonnes en 2 sous-colonnes de taille p et $n - p$.

7 ALGEBRE

1. Celà ressemble à la caractérisation d'un ouvert, mais le rayon de la boule ouverte incluse dans l'ensemble des matrices inversibles est fixe quand le centre varie dans l'ensemble des matrices orthogonales.
   On peut raisonner en choisissant une autre norme, puisqu'en dimension finie, elles sont toute équivalente.
   La norme triple construite avec la norme 2 des matrices colonnes est appropriée.
   Pour établir qu'une matrice proche de U est inversible, on peut établir que son noyau est réduit au singleton 0.

2. On montrer un contre-exemple avec des matrices diagonales:
   on construit 2 matrices diagonales U, de déterminant 1, et A, aussi proche de U que l'on veut, non inversible.

8 ALGEBRE.

1. On obtient que le rapport est constant.
2. On remarque que I est une image directe d'un ensemble par une fonction continue.
   On démontre le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction réelle définie sur un espace de dimension finie.
3. On voudrait appliquer le théorème des bornes atteintes en se ramenant à un fermé borné.
   On peut penser à utiliser la question 1.

9 ALGEBRE.

On utilise le théorème spectral et on travaille dans une BON de vecteurs propres de u.
Le quotient considéré s'exprime avec les valeurs propres, et on en trouve un équivalent quand k est grand, en raisonnant sur l'ordre des valeurs propres entre elles.
On remarque alors une condition suffisante pour obtenir la propriété souhaitée, et on montre qu'elle revient à se limiter à un ouvert dense.

10 ALGEBRE.

1. Penser à la structure algébrique de l'ensemble (stabilité par opérations ?)
2. Diagonaliser B et utiliser une interpolation de Lagrange.
3. Montrer et utiliser que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

11 ALGEBRE.

1. On considère une combinaison linéaire des vecteurs nulle, et on cherche à montrer que tous les scalaires sont nuls.
   On considère la même combinaison linéaire des vecteurs $f_k - e_k$. On développe la norme au carré en utilisant les hypothèses sur la base.
   On utilise un certain nombre d'inégalités : inégalité triangulaire pour majorer la norme au carré précédente, inégalité de Jensen,..., pour aboutir à une contradiction si les scalaires ne sont pas tous nuls.

2. On examine ce qui reste vrai dans Q1.
   On trouve un contre-exemple, en commençant par la dimension 2.

12 ALGEBRE.

On utilise la produit scalaire habituel sur les fonctions et on reformule les conclusions souhaitées avec ce produit scalaire.
On remarque qu'on peut faire des hypothèses sur les fonctions sans perte de généralité : produit scalaire avec 1 nul, ou bien norme égale à 1.
On travaille dans le sous-espace vectoriel engendré par 1, f, g, donc on est en dimension au plus 3, et on

utilise une base échelonnée dans cette famille pour décomposer les fonctions. On se ramène à des équations numériques sur les coordonnées.

13 **ALGEBRE.**
On utilise le théorème des bornes atteintes pour prouver l'existence.
On considère deux antécédents, et on veut majorer la différence des images.
On peut utiliser que la borne inférieure est un minimum, atteint.

14 **ALGEBRE.**
On peut commencer par raisonner pour $n = 2$.
On utilise des sous-espaces vectoriels engendrés par des vecteurs de la base canonique, et des écritures par blocs de taille (r, r), $(r, n-r)$, $(n-r, r)$ et $(n-r, n-r)$.
Recherche de CS : Peut-on trouver un tel sous-espace vectoriel de dimension la plus grande possible ?
Recherche de CN : Si A est dans F, alors $A + xJ_r$ doit être dans F pour tout x réel.
Peut-on alors trouver un sous-espace vectoriel du type de ceux ci-dessus qui est nécessairement en somme directe avec F, ce qui permet de majorer la dimension de F ?
Question supplémentaire : et si le sous-espace vectoriel ne contient pas J_r ?

15 **ALGEBRE.**
Q1 : Appliquer le théorème spectral à une matrice C bien choisie exprimée en fonction de B et de Q.
Q2 : Exprimer les 2 membres en fonction de $det(P)$ et du déterminant d'une matrice diagonale.
Se ramener ensuite à montrer une inégalité entre 2 fonctions (l'utilisation d'une inégalité de convexité est alors le moyen le plus simple de conclure).

Analyse

16 **ANALYSE**
Commencer par étudier la fonction en 0.
Pour l'étude en l'infini : Distinguer différents cas selon le signe de x.
Utiliser des comparaisons (sur des fonctions positives !), des IPP, l'écriture de l'intégrale complète comme somme d'une série d'intégrales sur des segments, dont on étudie la limite du terme général, la convergence par de inégalités.

17 **ANALYSE.**
Déterminer par récurrence la forme des dérivées successives, et se ramener à l'étude du nombre de racine d'un polynôme de degré n.
Pour établir le nombre exact de zéros, raisonner par récurrence sur n, et utiliser le théorème de Rolle.

18 **ANALYSE.**
Q1 : On utilise le théorème de convergence monotone et la passage de l'égalité à la limite.
Q2 : Etudier la suite $v_n = 2^n u_n$.
Etablir une relation de récurrence, puis étudier la convergence.
Q3 : Penser à étudier une suite fonction de u_n qui vérifierait une relation de récurrence connue (arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique).
Penser à étudier l'inverse de u_n.

19 **ANALYSE.**
Pour calculer la somme, on développe le binôme de Newton et on intervertit les 2 sommes. On montrer qsue la somme est bien définie.
Pour trouver un équivalent, on utilise une comparaison série-intégrale.

20 **ANALYSE.**
On commence par chercher toutes les solutions développables en séries entières. on trouve un espace vectoriel de dimension 1.
On montre ensuite que toute solution est DSE (par la formule de Taylor avec reste intégral).