Préparation à l'oral

Polycopié 2

Les exercices corrigés en classe prioritairement ont leurs intitulés sont en majuscules.

I Mines-ponts (1h, avec 15m de préparation)

Probabilités

1 PROBABILITES.

100 personnes montent dans un bus qui a 100 places.
Chaque personne a une place attribuée.
Cependant, la première personne monte dans le bus et, au lieu de s'asseoir à sa place, s'installe de façon aléatoire (et équiprobable) sur une des 100 places.
La deuxième personne monte dans le bus. Si sa place attribuée est libre, elle s'assied à sa place, sinon elle s'installe de façon aléatoire et équiprobable sur une des places disponibles,
et ainsi de suite. Quelle est la probabilité que la dernière personne qui monte dans le bus se retrouve à sa place attribuée ?

II X-ESCPI (50 minutes sans préparation)

Algèbre

2 ALGEBRE.

On considère $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AM+B} = \chi_{AM}$.
2. B est nilpotente et $BA = 0$.

3 ALGEBRE.

Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que : $\exists n > 1$, $M^n = M$.

4 ALGEBRE.

Caractériser les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont somme de deux matrices diagonalisables de rang 1.

5 ALGEBRE

E est un espace euclidien. On considère $(u, v) \in E^2$ non nuls, et on pose $\Omega = \{s \in \mathcal{O}(E) \ , \ s(u) = v\}$.

1. Donner une CNS pour que Ω soit non vide.
2. Ω est-il ouvert dans $\mathcal{L}(E)$? fermé ? borné ?

6 ALGEBRE

On considère $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
Montrer

$$rg(M) = p \Longleftrightarrow D = CA^{-1}B$$

7 ALGEBRE

On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la norme

$$N : A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \mapsto \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$$

1. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$, que l'on déterminera, tel que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et s'il existe $U \in \mathcal{O}(n)$ telle que $N(A - U) \leqslant \epsilon$, alors A est inversible.
2. Ce résultat reste-t-il vrai si on remplace $\mathcal{O}(n)$ par $\mathcal{SL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ , \ det(M) = 1\}$?

8 **ALGEBRE.**

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ non restreint à la fonction nulle. On note I l'ensemble des rapports $\dfrac{\|f\|_\infty}{\|f\|_2}$ quand f décrit F privé de la fonction nulle, en posant :

$$\|f\|_\infty = \underset{[0,1]}{sup}|f| \quad ; \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2}$$

1. Que dire de I si F est de dimension 1 ?
2. Dans le cas général, montrer que I est un intervalle inclus dans $[1,+\infty[$.
3. On suppose que F est de dimension finie. Montrer que I est fermé.

9 **ALGEBRE.**

E est un espace euclidien. Soit $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$.
Montrer qu'il existe $m > 0$ et un ouvert Ω dense dans E tels que

$$\forall x \in \Omega\ ,\ \frac{\|u^{k+1}(x)\|}{\|u^k(x)\|} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} m$$

10 **ALGEBRE.**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Montrer que $\{Q(A)\ ,\ Q \in \mathbb{C}[X]\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant.
On suppose que B a n valeurs propres distinctes.
Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = Q(A)$.
3. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant.
Montrer que $\{Q(A)\ ,\ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})\}$ est une partie dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Cet ensemble est-il fermé ? borné ?.

11 **ALGEBRE.**

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on considère une base orthonormée $(e_1,\ldots,e_n)$ de $\mathbb{R}^n*$.
On considère une famille $(f_1,\ldots,f_n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall k \in [\![1,n]\!]\ ,\ \|f_k - e_k\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

1. Montrer que $(f_1,\ldots,f_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que le résultat précédent n'est pas toujours vrai si on remplace l'inégalité stricte par une inégalité large.

12 **ALGEBRE.**

On considère $(f,g) \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})^2$ telles que $\int_0^1 fg = 0$. On pose

$$A = 4\left(\int_0^1 f\right)^2 \times \left(\int_0^1 g\right)^2$$

$$B = \int_0^1 f^2 \times \int_0^1 g^2$$

$$C = \int_0^1 f^2 \times \left(\int_0^1 g\right)^2 + \int_0^1 g^2 \times \left(\int_0^1 f\right)^2$$

Montrer que $B \geqslant A$ et $C \geqslant A$.

13 **ALGEBRE.**
On considère une boule $\mathcal{B}$ fermée de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose

$$g : \begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \underset{y\in\mathcal{B}}{inf}\{f(y) + \|x-y\|\} \end{array}$$

Montrer que g est 1-lipschitzienne.

14 **ALGEBRE.**
Déterminer la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel E de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les matrices sont de rang inférieur ou égal à r donné (compris entre 1 et $n-1$) et contenant la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

15 **ALGEBRE.**
On donne $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On pose $A = Q^TQ$.

1. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^TP$ et $B = P^TDP$, avec D matrice diagonale à coefficients strictement positifs.
2. Montrer que, pour α, β réels positifs tels que $\alpha + \beta = 1$, on a

$$det(\alpha A + \beta B) \geqslant det(A)^\alpha \times det(B)^\beta$$

Analyse

16 **ANALYSE**
Pour $x \in R$, on pose

$$I(x) = \int_0^{+\infty} e^{xt}\frac{\sin(t)}{t}dt$$

Etudier la convergence et l'absolue convergence de l'intégrale $I(x)$, en fonction de la valeurs de x.

17 **ANALYSE.**
On pose $f : x \mapsto e^{-x^2}$. En combien de points la dérivée n-ème de f s'annule-t-elle ?

18 **ANALYSE.**
On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2+u_n}$.

1. Etudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $u_n = \mathcal{O}(2^{-n})$.
3. Donner un équivalent de u_n.

19 **ANALYSE.**
On considère $a \in]0,1[$ et on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}(1-(1-a^k)^n)$.
Monter que (S_n) est bien définie, déterminer sa limite et un équivalent en $+\infty$.

20 **ANALYSE.**
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda \in]-1,1[$, et E l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui vérifient :

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ f'(t) = \alpha f(t) + f(\lambda t)$$

Montrer que E est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

21 **ANALYSE**
Exercice 1 : Montrer qu'il est impossible de trouver 4 polynômes P_1, P_2, P_3 et P_4 de $\mathbb{R}[X]$ tels que, sur un voisinage de 0^-, $P_1 < P_2 < P_3 < P_4$, et, sur un voisinage de 0^+, $P_2 < P_4 < P_3 < P_1$.
Exercice 2 : Déterminer la nature de la série $\sum \sin(2\pi e n!)$.

22 **ANALYSE.**

Exercice 1 :

On pose $a = (5\sqrt{2}+7)^{\frac{1}{3}}$ et $b = (5\sqrt{2}-7)^{\frac{1}{3}}$.

1. Calculer $a^3 - b^3$, $a \times b$.

2. Rappeler la formule de $a^n - b^n$.

3. Calculer $a - b$.

4. Résoudre $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, d'inconnue $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$
(Indication : Montrer que A^3 et $E_{1,3}$ sont semblables).

Exercice 2 * :

On considère un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré non nul et on pose

$$\Omega_p = \{r \in \mathbb{R}\ ,\ P(X) + r \ \texttt{scindé à racines simples dans}\ \mathbb{R}\}$$

1. Donner un exemple pour lequel $\Omega_p \neq \emptyset$.

2. Montrer que Ω_p est un intervalle ouvert.

23 **ANALYSE.**

On considère $\alpha > 0$. Etudier la convergence simple, uniforme et normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum \dfrac{\sin(nx)}{n^\alpha}$.

24 **ANALYSE.**

On pose la fonction

$$f : P \in \mathbb{R}_n[X] \to f(P) = \int_0^1 (P(x) - e^x)^2$$

Montrer que f admet un unique point critique.

25 **ANALYSE**

1. On considère $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que $\int_0^1 \cos(2\pi nt) f(t)dt \underset{n\to+\infty}{\to} = 0$.

2. Montrer que la propriété reste vraie si f est seulement lipschitzienne sur $[0,1]$.

26 **ANALYSE**

On pose $p_n = min\{q \in \mathbb{N}^*\ ,\ \sum\limits_{k=1}^{q} \dfrac{1}{k} \geqslant n\}$. Montrer que $\underset{n\to+\infty}{lim}\, p_n = +\infty$ puis que $\underset{n\to+\infty}{lim} \dfrac{p_{n+1}}{p_n} = e$.

27 **ANALYSE**

On définit sur $[0,1]$ la suite de fonctions (f_n) par $f_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f_{n+1} : x \mapsto f_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - f_n(x)^2\right)\Big)$$

Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

28 **ANALYSE.**

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(a) f est croissante.
(b) Pour tout intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, pour tout $x_0 \in I$, si $f - \phi$ admet un minimum local en x_0, alors $\phi'(x_0) \geqslant 0$.

29 **ANALYSE.**

On considère $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ et $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $y'' + fy = 0$ et $\int_0^{+\infty} f$ diverge.
Montrer que y s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}$.

30 **ANALYSE.**
On considère $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ continue et $T-$ périodique, et $0 < a < b$. Déterminer

$$\underset{n\to+\infty}{lim} \int_a^b f(tn)dt$$

31 **ANALYSE.**
On considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et on pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad , \quad \sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{S_k}{n+1}$$

et $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
On pose les assertions suivantes :
(i) (σ_n) converge vers 0.
(ii) Le rayon de convergence de f est au moins 1 et f admet une limite finie en 1.
A-t-on $(i) \Longrightarrow (ii)$? A-t-on $(ii) \Longrightarrow (i)$?

32 **ANALYSE.**
On pose $c = 0,12...910111213141516...2021222324...$ montrer que c est irrationnel.

33 **ANALYSE.**
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\tau(n)$ le nombre de diviseurs de n. Montrer : $\forall u > 0$, $\underset{n\to+\infty}{lim} \dfrac{\tau(n)}{n^u} = 0$.

34 **ANALYSE.**
Existe-t-il une suite de réels non nuls (a_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ soit scindé à racines simples dans $[0, 1]$?

35 **ANALYSE.**
On considère $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifie

$$\forall x \in R \ , \ \lim_{h\to+\infty} [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] = 0$$

Montrer que f est affine.

36 **ANALYSE.**
On considère $\alpha \in \mathbb{R} \setminus Q$.

1. La fonction $x \mapsto \cos(x) + \cos(\alpha x)$ est-elle périodique ?
2. La fonction $x \mapsto \sin(x) + \sin(\alpha x)$ est-elle périodique ?
3. On considère $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $T-$périodique $(T > 0)$, et dont le maximum est atteint en un seul point de $[0, T]$. La fonction $x \mapsto f(x) + f(\alpha x)$ est-elle périodique ?

Probabilités

37 **PROBABILITES**

On dispose de N pièces équilibrées. On les lance de façon indépendantes. On note X_1 le nombre de piles obtenus. On relance ces X_1 pièces et on note X_2 le nombre de piles obtenus, et ainsi de suite.

1. Calculer la fonction génératrice de X_2.
2. Calculer la fonction génératrice de X_k, pour $k \geqslant 3$.
3. On considère T l'instant où l'on n'a plus de pièces. Calculer $E(T)$ dans le cas où $N = 4$.

38 **PROBABILITES.**

On lance une pièce une infinité de fois. On note S_n le nombre de successions de deux piles consécutifs dans les n premiers lancers.

1. Déterminer $E(S_n)$ et $V(S_n)$.
2. On pose $T = min\{n \in \mathbb{N}\ ,\ S_n = 1\}$. Calculer la fonction génératrice de T, en déduire que T admet une espérance finie, déterminer son espérance et sa loi.

39 **DENOMBREMENT.**

On munit$[\![1, n]\!]$ de la probabilité uniforme.
Pour tout a diviseur de n, on note :

$$\mathcal{D}(a) = \{k \in [\![1, n]\!], k \text{ multiple de } a\}$$

1. Calculer $P(\mathcal{D}(a))$.
2. Soit $p_1, ..., p_r$ les diviseurs premiers de n.
   Démontrer que $\mathcal{D}(p_1), ..., \mathcal{D}(p_r)$ sont mutuellement indépendants.
3. Soit B l'ensemble des entiers de $[\![1, n]\!]$ premiers avec n.
   Calculer $P(B)$.
4. Soit $\phi(n)$ le nombre d'entiers de $[\![1, n]\!]$ premiers avec n. Calculer $\phi(n)$.

40 **PROBABILITES.**

Soit (X_k) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de même paramètre p.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = Max(X_1, ..., X_n)$.

1. Soit $N \in \mathbb{N}$. Calculer $E(X_1 1\!\!I_{X_1 \geq N+1})$.
2. Montrer que $M_n \leqslant N + \sum_{k=1}^{n} X_k 1\!\!I_{X_k \geq N+1}$.
3. Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, $E(M_n) = o(n^\alpha)$

41 **DENOMBREMENT.**

On considère un graphe planaire (graphe dont les arêtes ne se coupent pas), on pose a le nombre d'arêtes et s le nombre de sommets. Montrer que $a \leqslant 3s - 6$.

42 **PROBABILITES.** On considère une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $P(X_1 = 0)P(X_1 = 1) \neq 0$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
Montrer que $P(4 \texttt{ divise } S_n) \underset{n \to +\infty}{\to} \dfrac{1}{4}$.