15

Poly 2

Pour $k \in [\![1,N]\!]$: on numérote k la place attribuée à l'individu k.

on pose X_k le numéro de la place prise par l'individu k.

On pose N la taille du bus.

V1

- Supposons $N=2$.

$(X_2 \neq 2) = (X_1 = 2)$ $\qquad \mathbb{P}(X_2 \neq 2) = \frac{1}{2}$

$(X_2 = 2) = (X_1 = 1)$ $\qquad \mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{1}{2}$

- Supposons $N=3$.

$(X_3 \neq 3) = (X_1 = 3) \sqcup (X_1 = 2) \cap (X_2 = 3)$ $\qquad \mathbb{P}(X_3 \neq 3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$(X_3 = 3) = (X_1 = 1) \sqcup (X_1 = 2) \sqcup (X_2 = 1)$ $\qquad \mathbb{P}(X_3 = 3) = \frac{1}{2}$

- Supposons $N=4$:

$(X_4 \neq 4) = (X_1 = 4)$
$\sqcup (X_1 = 2) \cap (X_2 = 4)$
$\sqcup (X_1 = 2) \cap (X_2 = 3) \cap (X_3 = 4)$
$\sqcup (X_1 = 3) \cap (X_3 = 4)$

$$\mathbb{P}(X_4 \neq 4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{12}$$

$(X_4 = 4) = (X_1 = 1)$
$\sqcup (X_1 = 2) \cap (X_2 = 1)$
$\sqcup (X_1 = 2) \cap (X_2 = 3) \cap (X_3 = 1)$
$\sqcup (X_1 = 3) \cap (X_3 = 1)$

$\mathbb{P}(X_4 = 4) = \frac{1}{2}$

- $$(X_N \neq N) = \bigsqcup_{\substack{i_1 = 1 < i_2 < \dots < i_{p-1} < i_p = N \\ p \geq 2}} \underbrace{\bigcap_{k=1}^{p-1} (X_{i_k} = i_{k+1})}_{F_k}$$

$$(X_N = N) = \bigsqcup_{\substack{i_p = i_1 = 1 < i_2 \dots < i_{p-1} < N \\ p \geq 2}} \underbrace{\bigcap_{k=1}^{p-1} (X_{i_k} = i_{k+1})}_{F'_k}$$

$(X_N \neq N)$ et $(X_N = N)$ sont en bijection.

$\mathbb{P}(F_k) = \mathbb{P}(F'_k)$

$\mathbb{P}(X_N = N) = \mathbb{P}(X_N \neq N) = \frac{1}{2}$

(V2) Posons $u_N = \mathbb{P}(X_N = N)$ la probabilité cherchée pour 1 bus de taille N.

- $(X_N = N) = (X_1 = 1) \sqcup \left(\bigsqcup_{k=2}^{N-1} [(X_1 = k) \cap (X_N = N)] \right)$

$$u_N = \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = 1)}_{1/N} + \sum_{k=2}^{N-1} \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = k)}_{1/N} \times \mathbb{P}(X_N = N \mid X_1 = k).$$

Pour $k \in [\![2, N-1]\!]$: sachant $(X_1 = k)$: les individus de 2 à $k-1$ se placent bien.

on est ramené à la situation des individus $k, \dots n$

qui doivent se placer sur les $n-k+1$ places restantes $1, k+1, \dots, n$.

C'est identique au placement dans un bus à $n-k+1$ places,

l'individu k jouant le rôle de l'individu 1,

et se plaçant au hasard sur une des places $1, k+1 \dots n$,

en considérant que "sa" place est la 1.

Ainsi : $\mathbb{P}(X_N = N \mid X_1 = k) = u_{N-k+1}$.

$$\begin{cases} u_N = \dfrac{1}{N} + \displaystyle\sum_{k=2}^{N-1} u_{N-k+1} \times \dfrac{1}{N} = \dfrac{1}{N}\left(1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{N-1} u_k\right) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} u_k \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

- $u_2 = \frac{1}{2}$

Pour $N \geq 3$:

$$\left(\forall k \in [\![2, N-1]\!],\ u_k = \frac{1}{2}\right) \Rightarrow u_N = \frac{1}{N}\left(1 + \frac{1}{2} \times (N-2)\right) = \frac{1}{2}.$$

On a montré par récurrence forte :

$\forall N \geq 2,\ u_N = \frac{1}{2}$

(VI.1) Supposons (2)

Disposons de $(e_1 - e_p)$ une base de $\operatorname{Ker} B$ $(B \notin Gl_n(\mathbb{C}))$,
qu'on complète en 1 base $(e_1 - e_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$P^{-1}BP = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 \dots p & \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} 0 & B_2 \\ \hline 0 & B_4 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ p \end{array} \end{array}$$
, avec $P = (e_1 | \dots | e_n)$ (écriture par colonne)

Or $BA = 0$, donc $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker} B = \operatorname{vect}(e_1 - e_p)$,

donc : $$P^{-1}AP = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 \dots p & \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ p \end{array} \end{array}$$

Pour $M = \begin{pmatrix} \overbrace{M_1}^{p} & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} \Big]^{p} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$P^{-1}AMP = \left(\begin{array}{c|c} A_1M_1 + A_2M_3 & A_1M_2 + A_2M_4 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$P^{-1}(AM+B)P = \left(\begin{array}{c|c} C_1 & C_2 + B_2 \\ \hline 0 & B_4 \end{array}\right).$$

$\chi_{AM} = \chi_{C_1} \times \chi_{0_{n-p}}$

$\chi_{AM+B} = \chi_{C_1} \times \chi_{B_4}$.

Or $B^k = 0$, avec $k \in \mathbb{N}^*$,

donc $B_4^k = 0$, donc $\chi_{B_4} = X^{n-p} = \chi_{0_{n-p}}$

On a bien $\underline{\chi_{AM} = \chi_{AM+B}}$.

(V2) • Supposons 2 : $B^p = 0$ et $BA = 0$, avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Pour $M \in Gl_n(\mathbb{C})$:

$P^{-1}BP = T = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$. avec $P \in Gl_n(\mathbb{C})$.

$$\chi_{AM+B}(X) = \det(XI_n - AM - B)$$

$$= \det\left(\left(I_n - \frac{1}{X}B\right)(XI_n - AM)\right) \quad (\text{car } BA = 0)$$

$$= \underbrace{\det\left(I_n - \frac{1}{X}B\right)}_{\det\left(I_n - \frac{1}{X}T\right) = 1} \times \det(XI_n - AM) = \chi_{AM}(X)$$

(a) est Vraie

• Supposons (a)

▫ En posant $M = 0$: $\chi_B = \chi_{0_n} = X^n$. $\boxed{B \text{ est nilpotente}}$

▫ $tr((AM)^2) = tr((AM+B)^2)$ (en trigonalisant AM et $AM+B$).

car $\chi_{AM} = \chi_{AM+B}$.

donc $2\,tr(BAM) = 0$

En posant $M = (\overline{BA})^T$:

$$tr\left((BA) \times (\overline{BA})^T\right) = 0 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} |[BA]_{i,j}|^2$$

$\boxed{BA = 0}$

$\boxed{\text{(b) est Vraie}}$

$\boxed{3}$ CN : Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tq : $\exists n \geq 2, \; M^n = M$

$X^n - X$ est annulateur à racines simples dans $\mathbb{C}$

M est diagonalisable

$P^{-1} M P = D = \mathrm{diag}(a, b)$ avec $P \in Gl_n(\mathbb{C})$.

$P^{-1} M^n P = D^n = D$ donc $\begin{cases} a^n = a \\ b^n = b \end{cases}$ $(a,b) \in \{0\} \cup \mathbb{U}_{n-1}^2$.

CS : $M \in \{ P \,\mathrm{diag}(a,b) P^{-1}, \text{ avec } P \in Gl_2(\mathbb{C}), (a,b) \in (\{0\} \cup \mathbb{U}_{n-1})^2 \}$

convient.

5 1 $\boxed{\text{CN}}$ $s \in \Omega \Rightarrow \|v\| = \|s(u)\| = \|u\|$

$\boxed{\text{CS}}$ Supposons $\|u\| = \|v\|$

Posons $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\begin{cases} s(u) = v \\ s_{|u^\perp} = id_{\mathcal{L}(u^\perp, E)} \end{cases}$ $(\text{vect}(u) \oplus u^\perp = E)$

$s \in \Omega$

---

2 • Disposons de $\mathcal{B}$ une BON de E.

Posons $N : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$u \longmapsto tr(U^T U)$, en posant $U = \underset{\mathcal{B}}{mat}(u)$

N est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.

$\forall u \in \mathcal{O}(E)$, $N(u) = n$.

$\mathcal{O}(E)$, donc Ω, est borné sur E

$\boxed{\text{Met 2}}$ • Posons $N' : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$u \longmapsto \max\limits_{\|x\| = 1} \|u(x)\|$

existe par le théorème d'atteinte des bornes, car $x \longmapsto \|u(x)\|$ est continue sur le fermé borné $S(0,1)$ de E.

N' est une norme sur $\mathcal{L}(E)$ (norme "triple")

$\forall u \in \mathcal{O}(E)$, $N'(u) = 1$. $\mathcal{O}(E)$, donc Ω, est borné.

• $\Omega = \varphi^{-1}(\{1\}) \cap \psi^{-1}(\{v\})$,

en posant $\varphi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\psi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow E$

$u \longmapsto U^T U$, avec $U = \underset{\mathcal{B}}{mat}(u)$, $\quad u \longmapsto s(u)$

φ est continue (composée de $u \longmapsto \underset{\mathcal{B}}{mat}(u)$, isomorphisme donc continu, par $U \longmapsto U^T U$, continue car les coordonnées de l'image sont des fonctions polynômiales des coefficients de U).

ψ est continue car linéaire sur $\mathcal{L}(E)$, de dim. finie.

$\{1\}$ et $\{0\}$ sont fermés,

donc $\boxed{\Omega \text{ est fermé}}$ (comme intersection - quelconque - de fermés).

- Montrons que $\mathcal{L}(E) \backslash \Omega$ n'est pas fermé.

Posons $f_n \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\begin{cases} f_n(u) = (1+\frac{1}{n})v \\ f_n|_{u^\perp} = id_{u^\perp} \end{cases}$, $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $\begin{cases} f(u) = v \\ f|_{u^\perp} = id_{u^\perp} \end{cases}$

Disposons de $(e_2 - e_n)$ une base de $u^\perp$.

$f_n(u) \xrightarrow[n \to +\infty]{} v = f(u)$

$\forall k \in [\![2, n]\!]$, $f_n(e_k) = e_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(e_k) = e_k$

Posons $\varphi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow E^n$ $\quad$ φ est un isomorphisme,

$g \longmapsto (g(u), g(e_2), \dots, g(e_n))$ $\quad$ donc φ^{-1} est continue.

$\varphi(f_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varphi(f)$

donc $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f \in \Omega$

$f \in \overline{\mathcal{L}(E) \backslash \Omega}$ mais $f \notin \mathcal{L}(E) \backslash \Omega$

$\mathcal{L}(E) \backslash \Omega$ n'est pas fermé.

$\boxed{\Omega \text{ n'est pas ouvert}}$

- Rem : Les seules parties à la fois ouvertes et fermés de E sont $\emptyset$ et E.

- <u>Rappel :</u>

Ω ouvert $\Longleftrightarrow \mathring{\Omega} \supset \Omega$

$\Longleftrightarrow \forall x \in \Omega, \ \exists\, r > 0, \ B(x,r) \subset \Omega$

Ω fermé $\Longleftrightarrow \overline{\Omega} \subset \Omega$

$\Longleftrightarrow \forall x \in E, \ x = \lim\limits_{n \to +\infty} \underbrace{x_n}_{\in \Omega} \Rightarrow x \in \Omega$

$x \in \mathring{\Omega} \Longleftrightarrow \exists\, r > 0, \ B(x,r) \subset \Omega \quad (\mathring{\Omega} \subset \Omega)$

$x \in \overline{\Omega} \Longleftrightarrow \forall r > 0, \ B(x,r) \cap \Omega \neq \emptyset \quad (\Omega \subset \overline{\Omega})$

Ω non ouvert $\Longleftrightarrow \exists\, x \in \Omega, \ \forall r > 0, \ B(x,r) \not\subset \Omega$.

$\Longleftrightarrow E \setminus \Omega$ non fermé

$\Longleftrightarrow \exists\, x = \lim\limits_{n \to +\infty} \underbrace{x_n}_{\notin \Omega}$ tel que $x \in \Omega$.

$\boxed{6}$ • $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2 - CA^{-1}L_1$

$\underset{\ell}{\sim} \begin{pmatrix} A & B \\ O_{n,p} & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \underset{c}{\sim}_{C_2 \leftarrow C_2 - BA^{-1}C_1} \begin{pmatrix} A & O_{p,n} \\ O_{n,p} & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} = M''$

$\mathrm{rg}\, M \underset{(\dots)}{=} \underbrace{\mathrm{rg} A}_{p} + \mathrm{rg}(D - CA^{-1}B)$

$\mathrm{rg}\, M = p \Leftrightarrow \mathrm{rg}(D - CA^{-1}B) = 0 \Leftrightarrow D = CA^{-1}B.$

• $(\dots) \longrightarrow \mathrm{rg} M = \mathrm{rg}\, M'' = \mathrm{rg}(C_1^{M''}, \dots C_{n+p}^{M''})$

$= \dim \mathrm{vect}(C_1^{M''}, \dots C_{n+p}^{M''})$

$= \dim(\mathrm{vect}(C_1^{M''}, \dots C_p^{M''}) \oplus \mathrm{vect}(C_{p+1}^{M''}, \dots C_{n+p}^{M''})$

car $\mathrm{vect}(C_1^{M''}, \dots, C_p^{M''}) \subset \mathrm{vect}(E_1, \dots E_p)$

$\mathrm{vect}(C_{p+1}^{M''}, \dots, C_{n+p}^{M''}) \subset \mathrm{vect}(E_{p+1}, \dots E_{p+n})$

$= \mathrm{rg}(C_1^{M''}, \dots C_p^{M''}) + \mathrm{rg}(C_{p+1}^{M''}, \dots C_{n+p}^{M''})$

$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} A \\ O_{n,p} \end{pmatrix} + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} O_{p,n} \\ D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$

$\underset{\text{(rang des lignes)}}{=} \mathrm{rg} A + \mathrm{rg}(D - CA^{-1}B).$

7 ① 12

- Posons, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|||M||| = \max_{X \in S(0,1)} \|MX\|_2$.

$S(0,1) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\|_2 = 1\}$ est bornée fermée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de dim. finie.

$\| \|_2$ est 1 lipschitzienne $\left(\big| \|X\|_2 - \|Y\|_2 \big| \leq \|X-Y\|_2 \right)$

donc continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

D'après le théo. des bornes atteintes, $||| \; |||$ est définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(...) $||| \; |||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de dim. finie.

$\exists \alpha > 0, \quad ||| \; ||| \leq \alpha N$

- Posons $\varepsilon = \frac{1}{2\alpha}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Supposons : $\exists U \in \mathcal{O}(n), \; N(A-U) \leq \varepsilon$

$$|||A-U||| \leq \alpha\varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|X\| = 1$: $\|(A-U)X\|_2 \leq |||A-U||| \leq \frac{1}{2}$

$X \in \operatorname{Ker} A \Rightarrow \|(A-U)X\|_2 = \|UX\|_2 = \|X\|_2 \leq \frac{1}{2}$ Absurde
$= 1$

$X \notin \operatorname{Ker} A$

On a montré $\operatorname{Ker} A = \{0_{n,1}\}$

$A \in GL_n(\mathbb{R})$

---

② - $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\forall U \in GL_n(\mathbb{R}), \; \exists \varepsilon > 0, \; B_N(U, \varepsilon) \subset GL_n(\mathbb{R})$.

- En ⓐ, on a montré :

$\exists \varepsilon > 0, \; \forall U \in \mathcal{O}(n), \; B_N(U, \varepsilon) \subset GL_n(\mathbb{R})$

Posons $(\mathcal{P})$: $\exists \varepsilon > 0, \; \forall U \in SL(n), \; B_N(U, \varepsilon) \subset GL_n(\mathbb{R})$. Montrons que $(\mathcal{P})$ est faux.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, posons $U_k = \operatorname{diag}(k, \frac{1}{k}, 1 — 1) \in SL_n(\mathbb{R})$.

$A_k = \operatorname{diag}(k, 0, 1 —— 1) \notin GL_n(\mathbb{R})$

$N(A_k - U_k) = \frac{1}{k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$. Pour k grand : $B(U_k, \varepsilon) \not\subset GL_n(\mathbb{R})$. $\mathcal{P}$ est faux !

6 ① Pour $f\in F\setminus\{0\}$ $\lambda\in\mathbb{R}$: $\dfrac{\|\lambda f\|_\infty}{\|\lambda f\|_2}=\dfrac{\|f\|_\infty}{\|f\|_2}$. $E=\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. 13

$\dim F=1 \Rightarrow I$ est un singleton.

② • $\|f\|_2^2=\int_0^1 f^2\leq\int_0^1\|f\|_\infty^2=\|f\|_\infty^2$ donc $\dfrac{\|f\|_\infty}{\|f\|_2}\geq 1$

$I\subset[1,+\infty[$

• $I=\varphi(F\setminus\{0_E\})$ en posant $\varphi: F\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f\longmapsto\dfrac{\|f\|_\infty}{\|f\|_2}$.

φ est continue $(\ldots)$ sur $F\setminus\{0\}$.

Soit $(f,g)\in F\setminus\{0_E\}^2$

□ 1er cas : $0_E\notin[f,g]$ Soit $y\in[\varphi(f),\varphi(g)]$.

Posons $\alpha: [0,1]\longrightarrow I$, $t\longmapsto\varphi(f+t(g-f))$

α est continue $(\ldots)$ sur $[0,1]$, $\alpha(0)=\varphi(f)$, $\alpha(1)=\varphi(g)$.

D'après le TVI : $\exists t_0\in[0,1]$, $\alpha(t_0)=y$

$\varphi(\underbrace{f+t_0(g-f)}_{\in F\setminus\{0_E\}})=y$

$y\in I$

□ 2ème cas : $0_E\in[f,g]$.

$g=\lambda f$, avec $\lambda<0$.

$\varphi(f)=\varphi(g)$.

On a montré que $I=\varphi(F\setminus\{0_E\})$ est un intervalle.

③ F est de dim. finie.

D'après le ① : $I=\varphi(F\setminus\{0\})=\varphi(\underbrace{F\cap S(0,1)}_{\text{Sphère unité de l'evn } F\text{, fermé borné de } F.})$ en posant $S(0,1)=\{f\in E, \|f\|_\infty=1\}$

Théo d'atteinte des bornes : I admet un max et un min ;

I est un segment de $\mathbb{R}$.

$\boxed{9}$ $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$.

Thm spectral : $\exists (e_1 - e_n)$ BON de E, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $u(e_i) = \lambda_i e_i$, avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$\cdot \quad 0 < \lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_{p-1} < \lambda_p = \dots = \lambda_n$

Posons $\Omega = \{x \in E, \langle x, e_n \rangle \neq 0\}$.

- Soit $x \in \Omega$: $\quad x = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{x_i}_{\in \mathbb{R}} \cdot e_i$, avec $x_n \neq 0$.

$$u^k(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i^k \cdot e_i$$

$$\|u^k(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \lambda_i^{2k} > 0$$

$$\underset{k \to +\infty}{\sim} (x_p^2 + \dots + x_n^2)\, \lambda_n^{2k}.$$

$$\frac{\|u^{k+1}(x)\|^2}{\|u^k(x)\|^2} \underset{k \to +\infty}{\sim} \lambda_n^2.$$

- $\Omega = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^*)$ en posant $\varphi : x \mapsto \langle x, e_n \rangle$ continue $(\dots)$ sur E.

Ω est ouvert.

- Soit $x \in E \setminus \Omega$. $\quad x = \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{x_i}_{\in \mathbb{R}} \cdot e_i$.

$$\underbrace{x_k = x + \frac{1}{k} \cdot e_k}_{\in \Omega} \xrightarrow[k \to +\infty]{} x, \text{ donc } x \in \overline{\Omega}$$

Ω est dense dans E.

$\boxed{10}$ (1) Posons $F = \{Q(A),\ Q \in \mathbb{C}[X]\}$ ($= \mathrm{vect}(A^k)_{0 \leq k \leq n}$ (théo de Cayley-Hamilton)).

Disposons d'1 norme sur E.

Disposons de $(U_1, \dots, U_p)$ une BON de F, que l'on complète en une BON $(U_1, \dots, U_{n^2})$ de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$F = \{M \in E,\ \forall k \in [\![p+1, n^2]\!],\ \langle M, U_k \rangle = 0\}$.

$= \bigcap\limits_{p+1 \leq k \leq n^2} \varphi_k^{-1}\{0_{\mathbb{R}}\}$ en posant $\varphi_k : M \longmapsto \langle M, U_k \rangle$ continue (...) sur E

F est fermé

---

(2) • B est diagonalisable.

$P^{-1}BP = \underset{= D}{\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}$. avec $P \in Gl_n(\mathbb{C})$, $\lambda_1 \dots \lambda_n$ distinctes 2 à 2.

• Pour $k \in [\![1, n]\!]$: $Q(X) - \lambda_k \in \mathbb{C}[X]$ admet au moins 1 racine : μ_k dans $\mathbb{C}$

$Q(\mu_k) = \lambda_k$.

Posons $D' = \mathrm{diag}(\mu_1 \dots \mu_n)$.

$Q(D') = D$ donc $Q(\underbrace{PD'P^{-1}}_{A}) = PDP^{-1} = B$

---

(3) Posons $F = \{Q(A),\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\}$.

• Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$P^{-1}MP = T = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \ \ \ \ \lambda_1}^{\omega_1} & & \overbrace{\ \ (*) \ \ }^{\omega_p} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \ \ \ \ \lambda_p \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_1 \dots \lambda_p$ distinctes 2 à 2, $P \in Gl_n(\mathbb{C})$

Pour $j \in [\![1, p]\!]$; pour $i \in [\![1, \omega_j]\!]$, on pose $\lambda'_{j,i}(k) = \lambda_j + \dfrac{i}{k}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$

$\lambda'_{j,i}(k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \lambda_j$

$$T_k = \begin{pmatrix} \lambda'_{1,1} & & & & (t_{ij}) \\ & \lambda'_{1,\omega_1} & & & \\ & & \lambda'_{p,1} & & \\ & 0 & & & \lambda'_{p,\omega_p} \end{pmatrix} \xrightarrow[k \to +\infty]{} T$$

$$M_k = P T_k P^{-1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} P T P^{-1} = M$$

Pour k grand, M_k a n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$ (...).

$$\left(\left|\lambda_{j_1} + \frac{i}{k}\right| \leq |\lambda_{j_1}| + \frac{\omega_j}{k} \leq |\lambda_{j_2}| \quad \text{si} \quad \frac{\omega_j}{k} \leq \min_{j_1 \neq j_2} \left(|\lambda_{j_2}| - |\lambda_{j_1}| \right) \right)$$

D'après (2) : $M_k = Q(A_k)$, avec $A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$M = \lim_{k \to +\infty} \underbrace{Q(A_k)}_{\in F} \in \overline{F}$$

$\boxed{F \text{ est dense dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$

- $\overline{F} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \underset{(\dots)}{\neq} F$ (sinon toutes les matrices commuteraient).

- $F \supset Q(\lambda I_n) = Q(\lambda) \times I_n$.

$\|Q(\lambda) I_n\|_\infty = |Q(\lambda)|$ est non borné quand $\lambda \in \mathbb{C}$ $\left(|Q(x)| \xrightarrow[\substack{x \to +\infty \\ \in \mathbb{R}}]{} +\infty \right)$

$\boxed{F \text{ est non borné.}}$