

11 (1) Soit $(\lambda_1 - \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tels que $\sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot f_k = 0$. Supposons $(\lambda_1 - \lambda_m) \neq 0_{\mathbb{R}^m}$.

$$\alpha = \left\| \sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot (f_k - e_k) \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^m \lambda_k^2$$

De plus: $0 \leq \alpha \leq \left(\sum_{k=1}^m |\lambda_k| \times \|f_k - e_k\| \right)^2 \leq \frac{1}{m} \left(\sum_{k=1}^m |\lambda_k| \right)^2$

Or, $x \mapsto x^2$ est convexe sur \mathbb{R}_+ ,

donc (... inégalité de Jensen): $\left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{m} |\lambda_k| \right)^2 \leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \lambda_k^2$

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k^2 \geq \frac{1}{m} \left(\sum_{k=1}^m |\lambda_k| \right)^2 \quad \underline{\text{Absurde}}$$

(2) Supposons: $\forall k \in \{1, \dots, m\}, \|f_k - e_k\| \leq \frac{1}{\sqrt{m}}$

D'après le (1):

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot f_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^m \lambda_k^2 = \frac{1}{m} \left(\sum_{k=1}^m |\lambda_k| \right)^2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_m$$

Contre-exemple: dans \mathbb{R}^2 : Prenons $f_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ $f_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$$f_1 - e_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \quad f_2 - e_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

~~M. G. X~~ 12 $(f, g) \in \mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})^2$, $\int_0^1 fg = 0$. On pose $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$

$A = 4 \left(\int_0^1 f \right)^2 \left(\int_0^1 g \right)^2$

① Mque $B \geq A$ (1)

$B = \int f^2 \times \int g^2$

② Mque $C \geq A$ (2)

$C = \int f^2 \times \left(\int g \right)^2 + \left(\int f \right)^2 \int g^2$

(1) Vrai pour $(f, g) \Rightarrow$ (1) Vrai pour $(\lambda f, g)$ et pour $(f, \lambda g)$

On peut supposer sans perte de généralité $\langle f, 1 \rangle = \langle g, 1 \rangle = 1$.

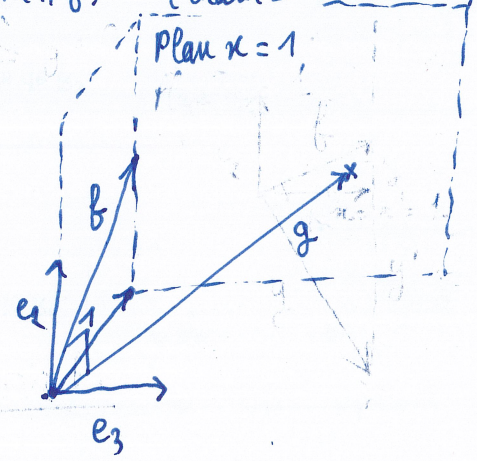
Posons $F = \text{vect}(1, f, g)$

(On suppose $f \neq 0, g \neq 0$)

1er cas: $\dim F = 3$

Disposons de $(1, e_2, e_3)$ une BON de F telle que $\text{vect}(1, e_2) = \text{vect}(1, f)$ (Gram-Schmidt)

$f = x \cdot 1 + y \cdot e_2 + z \cdot e_3$ et $x = \langle f, 1 \rangle = 1$
 $g = x' \cdot 1 + y' \cdot e_2 + z' \cdot e_3$ et $x' = \langle g, 1 \rangle = 1$



$\|A\| = 4$

$B = \|f\|^2 \times \|g\|^2$

$C = \|f\|^2 + \|g\|^2$

On a $\langle f, g \rangle = 1 + yy' - zz' = 0$

et du calcul...

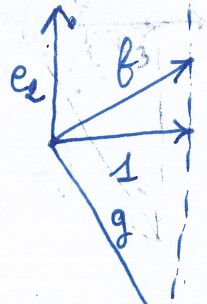
① $B = \|f\|^2 \times \|g\|^2 = (1+y^2) \times (1+y'^2+z'^2)$
 $= 1 + \underbrace{y^2 y'^2}_1 + y^2 z'^2 + y^2 + y'^2 + z'^2$
 $= 2 + y^2 z'^2 + (y+y')^2 - 2yy' + z'^2 \geq 4$

~~C //~~
 $C = 1 + y^2 + y'^2 + z'^2 + 1$
 $\geq 2 - 2yy' + z'^2$
 $\geq 4 + z'^2 \geq 4 = A$

2ème cas: $\dim F = 2$. Disposons de $(1, e_2)$ une BON de F .

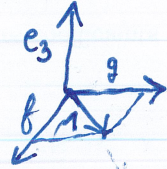
Même calcul avec $z' = 0$.

② $\|f\|^2 + \|g\|^2 \geq 2\|f\| \times \|g\| \geq 2 \times 2 = 4$

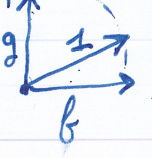


3ème cas: $\dim F = 1$, $f = \text{cste}$, $g = \text{cste}$.

$\dim F = 3$



$\dim F = 2$



Autre option: $F = \text{vect}(f, g, 1)$ BON (f, g, e_3)

On suppose $\|f\| = \|g\| = 1$ sans perte de généralité.

13. Pour $x \in B = \bar{B}(0, 1)$:

$y \mapsto f(y) + \|y - x\|$ est continue sur le fermé borné B de \mathbb{R}^m , de dim. finie
donc, d'après le théorème d'atteinte des bornes,
admet un minimum sur B .

g est définie sur B

• Pour $(x, x') \in B^2$:

On dispose de $y' \in B$ tel que $g(x') = f(y') + \|y' - x'\|$

Or $g(x) = \min_{y \in B} \{ f(y) + \|y - x\| \}$ donc $g(x) \leq f(y') + \|y' - x\|$

$$g(x) - g(x') \leq f(y') + \|y' - x\| - f(y') - \|y' - x'\|$$
$$= \|y' - x\| - \|y' - x'\| \leq \|x - x'\|$$

g est 1-lipschitzienne



14) (*) Param $F = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (A, B) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{r, n-r}(\mathbb{R}) \right\}$

$n-r, r$ $n-r, n-r$

F est un sous-ec de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et dim $F = r \times n$

$F \ni J_r.$

$\forall M \in F, \text{rg } M \leq r$ | F convient

(*) Recherche de C.N.: Considerons F une éventuelle solution.

Param $G = \left\{ \begin{pmatrix} O_r & B \\ B^T & D \end{pmatrix}, (D, B) \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{r, n-r}(\mathbb{R}) \right\}$

dim $G = r(n-r) + (n-r)^2 = n^2 - nr.$

Preons $M \in F \cap G$

$M = \begin{pmatrix} O_r & B \\ B^T & D \end{pmatrix}$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $M + \lambda J_r \in F$

Or $M + \lambda J_r = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_r & B \\ \hline B^T & D \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{\lambda} B^T L_1}$ suite d'op. éliminatoires sur les lignes

$\xrightarrow{N_C} \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_r & B \\ \hline O_{n-r, r} & D - \frac{1}{\lambda} B^T B \end{array} \right) \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - \frac{1}{\lambda} C_1 B}$ suite d'op. éliminatoires sur les colonnes.

$\xrightarrow{N_C} \left(\begin{array}{c|c} J_r & O_{r, n-r} \\ \hline O_{n-r, r} & D - \frac{1}{\lambda} B^T B \end{array} \right)$

$$\text{rg}(M + \lambda I_n) = r + \text{rg}\left(D - \frac{1}{\lambda} B^T B\right) \leq r,$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, D - \frac{1}{\lambda} B^T B = 0$$

donc $D = B^T B = 0$

$$\forall X \in \mathcal{U}_{n,1}(\mathbb{R}), \|BX\|^2 = X^T B^T B X = 0$$

$$B = 0$$

$$M = 0_n.$$

$$F \cap G = \{0_n\}$$

$$\dim F + \dim G = \dim(F+G) \leq n$$

$$\dim F \leq n - \dim G = nr$$

La dimension maximale est nr .

* Rem: Méthode 2 Pour étudier $\text{rg}(M + \lambda I_n) = \begin{pmatrix} \lambda I_r & B \\ B^T & D \end{pmatrix}$

Pour $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \begin{matrix}]r \\]n-r \end{matrix} \in \mathcal{U}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$(M + \lambda I_n)Z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda X + BY = 0 \\ B^T X + DY = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = -\frac{1}{\lambda} BY \\ \left(-\frac{1}{\lambda} B^T B + D\right) Y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y \in \text{Ker}\left(D - \frac{1}{\lambda} B^T B\right) \\ X = -\frac{1}{\lambda} BY \end{cases}$$

$\text{Ker}(M + \lambda I_n)$ et $\text{Ker}\left(D - \frac{1}{\lambda} B^T B\right)$ sont isomorphes.

$(\varphi: \text{Ker}\left(D - \frac{1}{\lambda} B^T B\right) \longrightarrow \text{Ker}(M + \lambda I_n) \text{ est un isomorphisme})$

$$Y \longmapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda} BY \\ Y \end{pmatrix}$$

19d

$$\dim \text{Ker} \underbrace{(M + \lambda J_r)}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \dim \text{Ker} \underbrace{\left(D - \frac{1}{\lambda} B^T B \right)}_{\in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})}$$

$$n - \text{rg}(M + \lambda J_r) = n - r - \text{rg}\left(D - \frac{1}{\lambda} B^T B\right)$$

$$\text{rg}(M + \lambda J_r) = r + \text{rg}\left(D - \frac{1}{\lambda} B^T B\right).$$

* Rem: Supposons $M = \begin{matrix} & \begin{matrix} r & n-r \end{matrix} \\ \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix} & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \end{matrix}$

Montrons $\text{rg} M = \text{rg} A + \text{rg} D$

$$\text{rg} M = \dim \text{vect} (C_1^M, \dots, C_r^M, C_{r+1}^M, \dots, C_n^M)$$

$$= \dim \left(\text{vect} (C_1, \dots, C_r) \oplus \text{vect} (C_{r+1}, \dots, C_n) \right)$$

car $\text{vect} (C_1, \dots, C_r) \subset \text{vect} (E_1, \dots, E_r)$

$\text{vect} (C_{r+1}, \dots, C_n) \subset \text{vect} (E_{r+1}, \dots, E_n)$

$$= \text{rg} (C_1, \dots, C_r) + \text{rg} (C_{r+1}, \dots, C_n)$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} + \text{rg} \begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix}$$

$$= \text{rg} (A) + \text{rg} (D)$$

le rang de la matrice et le rang de ses lignes, dont certaines sont nulles.

15 ① Posons $C = (Q^{-1})^T B Q^{-1}$

- $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, donc : $C = O^T D O$, avec $O \in \mathcal{O}(n)$.
 $D = O C O^T \quad | \quad D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

$B = Q^T C Q = Q^T O^T D O Q$
 $= P^T D P$, en posant $P = O Q \in GL_n(\mathbb{R})$.

$P^T P = Q^T \underbrace{O^T O}_{I_n} Q = A$

$\forall X \in \mathcal{O}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}, X^T C X = \underbrace{(Q^{-1} X)^T B (Q^{-1} X)}_{\neq 0_{n,1}} > 0$

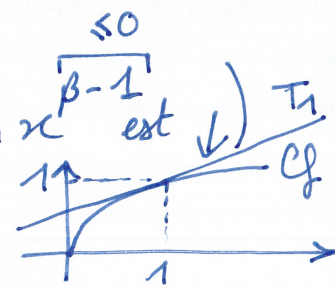
donc $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
 donc D a des coef. strictement positifs

② Prenons $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$ tels que $\alpha + \beta = 1$.

$\det(\alpha A + \beta B) = \det(P^T (\alpha I_n + \beta D) P)$
 $= \det P^T \times \det(\alpha I_n + \beta D) \times \det P$
 $= (\det P)^2 \times \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta d_{i,i}) = (\det P)^2 \times \prod_{i=1}^n (1 - \beta + \beta d_{i,i})$

$\det(A)^\alpha \times \det(B)^\beta = \det(P)^{2\alpha} \times (\det(P^T) \times \det(D) \times \det(P))^\beta$
 $= \det(P)^{2\alpha + 2\beta} \times \det(D)^\beta$
 $= \det(P)^2 \times \prod_{i=1}^n d_{i,i}^\beta$

Posons $f_\beta : x \mapsto x^\beta$. f_β est concave sur \mathbb{R}_+ ($f'_\beta : x \mapsto \beta x^{\beta-1}$ est \downarrow)
 $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_\beta(x) \leq T_1(x) = f(1) + f'(1) \times (x-1) = 1 + \beta(x-1)$
 $\forall i \in \{1, \dots, n\}, d_{i,i}^\beta \leq 1 - \beta + \beta d_{i,i} \quad (d_{i,i} > 0)$
 donc $\det(\alpha A + \beta B) \geq \det A^\alpha \times \det B^\beta$



16

$e^{xt} \frac{\sin t}{t} \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 1$, $\int_0^1 e^{xt} \frac{\sin t}{t} dt$ converge

• 1er cas: $x < 0$:

$e^{xt} \frac{\sin t}{t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ $\int(x)$ est AC

• 2ème cas: $x > 0$.

$S(x) = \int_0^{+\infty} e^{xt} \frac{\sin t}{t} dt$
 $= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{xt} \frac{\sin t}{t} dt$
 $= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^\pi e^{x(t+k\pi)} \frac{\sin t}{t+k\pi} dt$ $t' = t - k\pi$

$\alpha_k \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi e^{x(t+k\pi)} \sin t dt \geq \frac{e^{k\pi x}}{(k+1)\pi} \int_0^\pi \sin t dt = \frac{2e^{k\pi x}}{(k+1)\pi}$

$\alpha_k \not\rightarrow 0$ $k \rightarrow +\infty$ donc $(S(x))$ diverge donc $\int(x)$ diverge.

• 3ème cas: $x = 0$

$\int_1^A \frac{\sin t}{t} dt = \left[-\cos t \times \frac{1}{t} \right]_1^A + \int_1^A \frac{\cos t}{t^2} dt$ donc $\int(x)$ converge

$T(x) = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$

$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t+k\pi} dt$
 $\beta_k \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi \sin t dt = \frac{2}{(k+1)\pi}$

$\sum \beta_k$ diverge.

$(T(x))$ diverge

$\int(x)$ n'est pas AC.

17. f est C^∞ sur \mathbb{R} .

Définissons par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$: $\mathcal{P}(m)$: $\left\{ \begin{array}{l} \exists P_m \in \mathbb{R}[X], f^{(m)}: x \mapsto P_m(x) e^{-x^2} \\ \deg(P_m) = m \end{array} \right.$

$f^{(0)} = f: x \mapsto 1 \times e^{-x^2}$. $\mathcal{P}(0)$ est vrai.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$: $\exists P_n \in \mathbb{R}[X], \left\{ \begin{array}{l} f^{(n)}: x \mapsto P_n(x) e^{-x^2} \\ \deg(P_n) = n \end{array} \right.$

$f^{(n+1)}: x \mapsto (P_n'(x) - 2x P_n(x)) e^{-x^2}$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, en posant $P_{n+1} = P_n' - 2x P_n$, $\deg(P_{n+1}) = \deg(2x P_n) = n+1$.

On a montré: $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

• P_n a au plus n racines.

$f^{(n)}$ a au plus n zéros.

$f': x \mapsto -2x e^{-x^2}$ a exactement un zéro.

Supposons que $f^{(n)}$ admet exactement n zéros $x_1 < \dots < x_n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

□ Si $n \geq 2$: d'après le thm de Rolle:

$\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \exists y_k \in]x_k, x_{k+1}[, f^{(n+1)}(y_k) = 0$

□ $f^{(n)}(x_n) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)} = 0$ (nouvelles comparées)

$\forall x > x_n, f^{(n+1)}(x) \neq 0 \Rightarrow f^{(n+1)}$ de signe constant sur $]x_n, +\infty[$

$\Rightarrow f^{(n)}$ strictt monotone

$\Rightarrow f^{(n)} = 0$ sur $]x_n, +\infty[$ Absurde

$\exists y_n > x_n, f^{(n+1)}(y_n) = 0$

De même: $\exists y_0 < x_0, f^{(n+1)}(y_0) = 0$

$f^{(n+1)}$ a au moins $n+1$ zéros,

donc a exactement

18 (1) Par récurrence immédiate: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

$$\forall n, u_{n+1} \leq u_n$$

(u_n) est \downarrow minorée par 0, donc converge vers $l \geq 0$.

Par l'unicité de la limite: $l = \frac{l}{2+l} \quad \underbrace{l(2+l)}_{>0} = l \text{ donc } \underline{l=0}$

(2) $u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$ donc $u_n \leq \frac{u_0}{2^n}, \quad u_n = O\left(\frac{1}{2^n}\right)$

(3) Posons $w_n = \frac{1}{u_n}$.

$$w_{n+1} = \frac{2+u_n}{u_n} = 2w_n + 1$$

$$w_{n+1} + 1 = 2(w_n + 1)$$

$(w_n + 1)$ est géométrique.

$$w_n + 1 = (w_0 + 1) \times 2^n$$

$$u_n = \frac{1}{2^n \left(1 + \frac{1}{u_0}\right) - 1} \sim \frac{u_0}{u_0 + 1} \times \frac{1}{2^n}$$

19 • $S_m = \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - (1-a^k)^m)$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} (-1)^{i+1} a^{ki}$$

$$= \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} (-1)^{i+1} \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a^{ki}}_{\text{série convergente. par unicité, } S_n \text{ est def.}}$$

$$= \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} \times \frac{(-1)^{i+1}}{1-a^i}$$

• Posons $f_n: t \mapsto 1 - (1-a^t)^m$, f_n est \downarrow , positive sur \mathbb{R}_+ .

$\forall k \in \mathbb{N}, \int_k^{k+1} f_n \leq f_n(k) \leq \int_{k-1}^k f_n$

$$\int_0^{+\infty} f_n \leq S_m \leq \frac{f(0)}{m} + \int_1^{+\infty} f_n$$

Quand $t \rightarrow +\infty, \underbrace{(1-a^t)^m}_0 = 1 - mat + o(at)$

$f_n(t) = 1 - (1-a^t)^m \sim mat$ donc f_n est intégrable sur \mathbb{R}_+

$$\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} [1 - (1-a^t)^m] dt = \int_0^1 (1-u)^m \times \left(\frac{-du}{(lua)(1-u)} \right) = -\frac{1}{lua} \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^1 u^i$$

$$= -\frac{1}{lua} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1}$$

$$= -\frac{1}{lua} \sum_{i=1}^m \frac{1}{i}$$

• $\lim S_m = +\infty$ | $(lua < 0)$

• $S_m \underset{(\dots)}{\sim} -\frac{lnm}{lua}$

20 • E est un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

• Supposons $f \in E$ et f DSE sur $] -R, R[$.

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \dots \quad (n+1)a_{n+1} = (\alpha + \lambda^n)a_n$

• Posons (a_n) tq $(n+1)a_{n+1} = (\alpha + \lambda^n)a_n$.

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de rayon $+\infty$, donc $f \in E$

• Soit $f \in E$. Posons $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt$. $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}$ sur $[0, x]$

Par récurrence: $f^{(n)}(t) = \alpha f^{(n-1)}(t) + \lambda^{n-1} f^{(n-1)}(\lambda t)$.

$\|f^{(n)}\|_{\infty}^I \leq (|\alpha| + 1) \|f^{(n-1)}\|_{\infty}^I \leq (|\alpha| + 1)^n \|f\|_{\infty}^I$ avec I segment $I \supset [0, x]$

$|R_n(x)| \leq \|f\|_{\infty}^I \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \times (|\alpha| + 1)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

f est DSE.

$E = \text{vect}(f_0)$ donc $\dim E = 1$