$\boxed{2.1}$ • $P_1 - P_2$ change de signe en 0, $\boxed{\text{Ex 1}}$

donc $(P_1 - P_2)(x) \underset{0}{\sim} a x^{2n+1}$, avec $a > 0$, $j \in \mathbb{N}$.

De même : $(P_3 - P_4)(x) \underset{0}{\sim} b x^{2p+1}$, avec $b, c > 0$

$$(P_1 - P_4)(x) \underset{0}{\sim} c x^{2q+1}$$

$$(P_3 - P_1)(x) \sim d x^{2j}, \quad \text{avec } d, e, f > 0$$

$$(P_4 - P_2)(x) \sim e x^{2i}$$

$$(P_3 - P_2)(x) \sim f x^{2k}$$

Ainsi : • $(P_3 - P_1)(x) = d x^{2j} + o(x^{2j})$

$$= f x^{2k} + o(x^{2k}) - a x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

donc $n \geq k = j$ et $f = d$.

De même, en examinant $P_3 - P_4$: $f = e$ et $p \geq k = i$.

$P_1 - P_4$: $a = c$, $n = q \cancel{\geq} i - 1$

donc : $k = j \leq n$ et $k = i \geq n + 1$ Absurde

$\boxed{\text{Ex 2}}$ • $u_n = \sin(2\pi e n!)$

$$= \sin\left(2\pi n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right)$$

$$= \sin\left(\underbrace{2\pi \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}}_{\in \mathbb{N}} + 2\pi \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}\right)$$

$$= \sin\left(2\pi \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}\right) \quad \text{(par } 2\pi\text{-périodicité de sin)}$$

• $\forall k \geqslant n+1, \quad \frac{n!}{k!} = \frac{1}{\prod_{j=n+1}^{k} j} \leqslant \frac{1}{(n+1)^{k-n}}$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^k} \quad (\text{CI } k' = k-n)$$

$$= \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}.$$

$2\pi \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $\underline{\text{donc}}$ $\boxed{u_n \sim 2\pi \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} = v_n}$

• $v_n = \frac{2\pi}{n+1} + 2\pi \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{k!}$

$$\alpha_n = \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \leqslant \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{k-n}} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^k}$$

$$= \frac{1}{(n+2)^2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^2}$$

$\alpha_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\underline{\text{donc}}$ $v_n \sim \frac{2\pi}{n+1}$

$\boxed{u_n \sim \frac{2\pi}{n+1} \quad \text{G.} \ldots \text{ donc } \sum u_n \text{ diverge}}$

$\boxed{22}$ ① $a^3 - b^3 = 14$. $a \times b = 1$ $\boxed{\text{Ex 1}}$

② $a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right)$ (à montrer par télescopage)

③ $a - b = \dfrac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2 + ab}$

$= \dfrac{14}{(a-b)^2 + 3ab}$

$= \dfrac{14}{(a-b)^2 + 3}$

$a+b = \dfrac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2 - ab}$

$= \dfrac{a^3 + b^3}{(a+b)^2 - 3ab}$

$= \dfrac{10\sqrt{2}}{(a+b)^2 - 3}$

$a - b$ est solution de $x(x^2+3) = 14$

$f(x) = x^3 + 3x - 14 = 0$

$a+b$ est solution de $y(y^2-3) = 10\sqrt{2}$

$y^3 - 3y - 10\sqrt{2} = 0$

f est C^0 et st $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$, donc réalise 1 bij. de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
f a un unique zéro dans $\mathbb{R}$, qui est 2

$\boxed{a - b = 2}$

---

④ • Posons $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rg} B = 1$, dim Ker $B = 2$.

$\chi_B = X^2(X - \operatorname{tr} B) = X^3$ $\quad Sp(B) = \{0\}$, Ker B = vect$(\underbrace{E_1 - E_3}, 2E_1 + E_2)$

$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $U_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Posons $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_1 = BU_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} B$

$U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} B$.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$ $\quad (U_3 \notin \operatorname{Ker} P = \text{vect}(U_1, U_2))$

$P^{-1} B P = E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T$

• Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $A^3 = B \Leftrightarrow (\underbrace{P^{-1} A P}_{A'})^3 = T$

- Recherche de CN :

Supposons $A'^3 = T = E_{1,3}$. $A' \neq 0$ et $A' \notin GL_3(\mathbb{R})$. $\mathrm{rg} A \in \{1;2\}$

$\mathrm{Im}\, A'^3 = \mathrm{vect}(E_1) \subset \mathrm{Im}\, A'^2 \subset \mathrm{Im}\, A'$ | $\mathrm{Ker}\, A' \subset \mathrm{Ker}\, A'^2 \subset \mathrm{Ker}\, A'^3 = \mathrm{vect}(\epsilon_1, \epsilon_2)$

$1 = \mathrm{rg} A'^3 \leq \mathrm{rg} A'^2 \leq \mathrm{rg} A'$

□ 1er cas : $\mathrm{rg} A' = 1$.

$\mathrm{Im}\, A' = \mathrm{Im}\, A'^2 = \mathrm{Im}\, A'^3 = \mathrm{vect}(E_1)$

$$A' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A'^3 = \begin{pmatrix} a^3 & a^2 b & a^2 c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq E_{1,3} \quad \underline{\text{Impossible}}$$

□ 2ème cas : $\mathrm{rg} A' = 2$.

$A' E_{1,3} = E_{1,3} A'$ donc $\mathrm{Ker}\, E_{1,3} = \mathrm{vect}(\epsilon_1, \epsilon_2)$ est stable par A'

$\mathrm{Im}\, E_{1,3} = \mathrm{vect}(E_1)$

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{B'} & \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & C \end{array}\right)$$

$C^3 = 0$ donc $C = 0$. et $B' \neq 0$ (sinon $\mathrm{rg} A \leq 1$)

$\mathrm{Ker}\, A' = \mathrm{vect}(\alpha E_1 + \beta E_2)$ donc $\alpha C_1 + \beta C_2 = 0$ donc $\mathrm{rg}\, B' = 1$

$B'^3 = 0$ donc $Sp(B') = \{0\}$, $\chi_B = X^2$, $B'^2 = 0$, $A'^2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, $\mathrm{rg} A'^2 \leq 1$

$\mathrm{rg} A'^2 = 1$

dc $\mathrm{Im}\, A'^2 = \mathrm{Im}\, A'^3 = \mathrm{vect}(E_1)$, $A'^2 = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{0} & \begin{matrix} d \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, avec $d \neq 0$

$A'^2 E_3 = d E_1$

$E_1 = A'^3 E_3 = d A' E_1$, $A' E_1 = \frac{1}{d} E_1$.

$$B' = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \text{ donc } B' = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & e & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A'^2 E_1 = \frac{1}{d^2} E_1 = 0$ Absurde

Pas de solution.

Ex 2

(*) Supposons que $Q = P + R_0$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$.

Posons $n = \deg(Q) \geq 1$

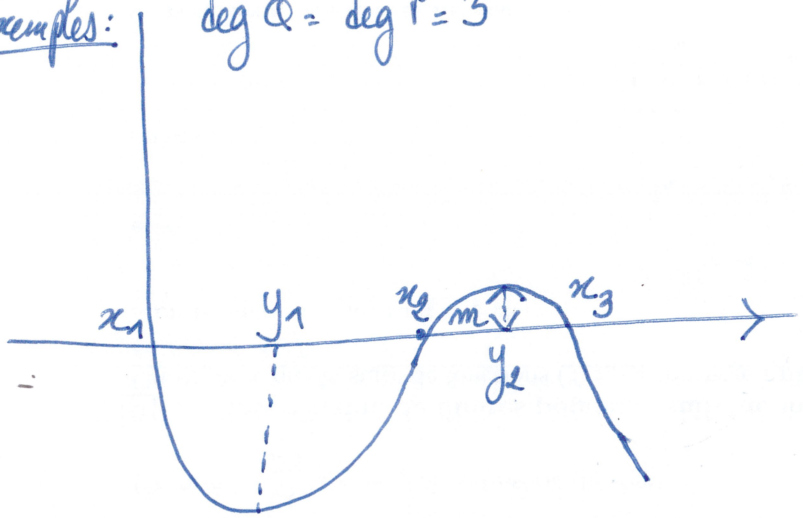
$x_1, \dots, x_n$ les zéros de Q,

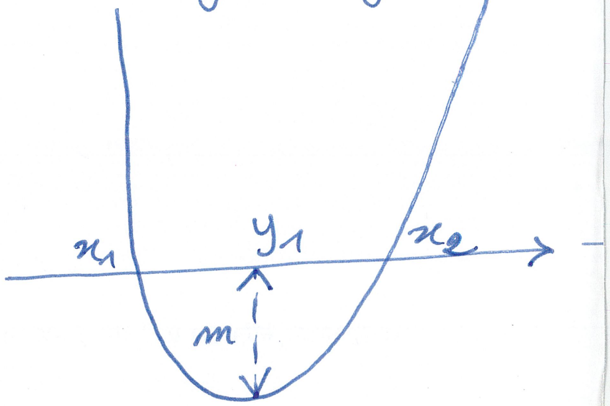
$y_1, \dots, y_{n-1}$ les zéros de Q',

avec $x_1 < y_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < y_{n-1} < y_n$ (Rolle ....)

Supposons (quitte à remplacer Q par $-Q$) que $\lim Q = +\infty$ / $-\infty$

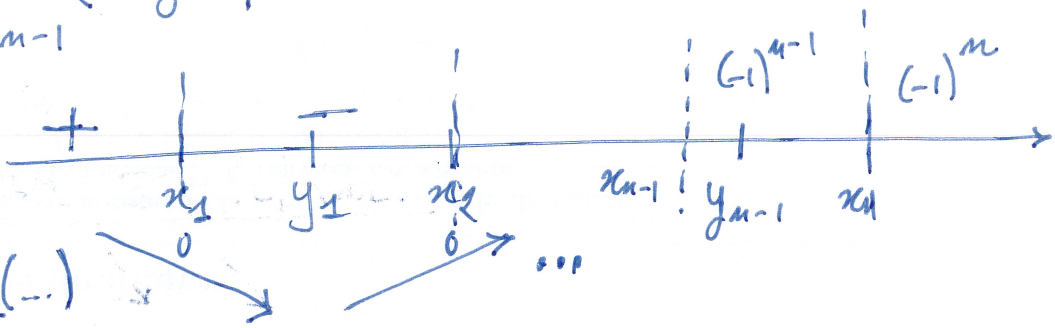
Exemples: $\deg Q = \deg P = 3$ $\qquad$ $\deg Q = \deg P = 2$





Posons $m = \min\limits_{0 \leq k \leq n-1} (|Q(y_k)|)$.

Signe de Q:



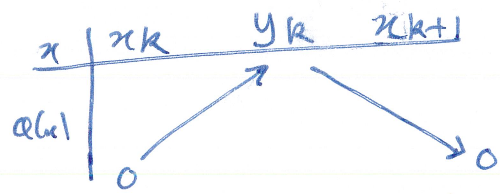
Sens de variation de Q: (...)

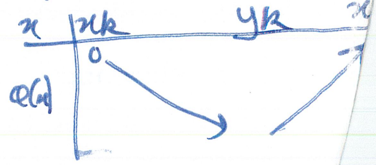
Prenons $\varepsilon \in \mathbb{R}$ et posons $Q_1 = Q + \varepsilon$.

$Q' = Q_1'$ a pour zéros $y_1, \dots, y_{n-1}$.

Posons $I = \{ r \in \mathbb{R},\ P + r \text{ scindé à racines simples} \}$

Si $Q \geq 0$ sur $[x_k, x_{k+1}]$: $\qquad$ $Q \leq 0$ sur $[x_k, x_{k+1}]$





(*) Supposons $|\varepsilon| < m$.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $Q_1(y_k)$ a même signe que $Q(y_k)$

$\lim_{\pm\infty} Q_1 = \lim_{\pm\infty} Q$

D'après le TVI (...), Q_1 admet n racines réelles distinctes

$x'_1, \dots x'_n$ telles que

$x'_1 < y_1 < x'_2 < \dots < x'_{n-1} < y_{n-1} < x'_n$.

Q_1 est scindé à racines simples.

$]r_0 - m, r_0 + m[\subset I$.

I est un ouvert

(*) Supposons $n \geq 3$. Il existe $k_1 \in [\![0, n-1]\!]$ tq $Q(y_k) > 0$

k'_1 ——— $Q(y_{k'_1}) < 0$.

Posons $m^+ = \min_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ P(y_k) > 0}} (P(y_k))$, $m^- = \min_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ P(y_k) < 0}} (|P(y_k)|)$

Si $-m^+ < \varepsilon < m^-$, alors (cf. plus haut) Q_1 est scindé à racines simples

Si $\varepsilon \geq m^-$ ou $\varepsilon \leq -m^+$:

il existe $k_0 \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $Q_1(y_{k_0}) Q(y_{k_0}) \leq 0$

Or $\lim_{\pm\infty} Q_1 = \lim_{\pm\infty} Q$,

donc (...) Q_1 n'est pas scindé à racines simples.

(il existe 2 intervalles successives parmi $]-\infty, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... $[x_n, +\infty[$ sur lesquels Q_1 ne change pas de signe, donc n'a pas de zéros. Il n'y a pas de zéros supplémentaire ailleurs sinon il y aurait des extrema supplémentaires).

Finalement : $I =]-m^+, -m^-[$

(*) Supposons $n = 2$.

(Si) $P(y_1) < 0$, alors (...) $I =]-\infty, -m^-[$

(Si) $P(y_1) > 0$, alors (...) $I =]-m^+, +\infty[$.

$\boxed{23}$ $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Pour $x\in\mathbb{R}$.

$f_n(x) = O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$. $\alpha>1 \Rightarrow \sum f_n(x)$ AC.

- Supposons $x \not\equiv 0[2\pi]$ (sinon $f_n=0$)

Posons $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \mathrm{Im}(z_n)$

en posant $z_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \dfrac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$

$= e^{\frac{inx}{2}} \times \dfrac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

$|S_n| \leqslant \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}} = c(x)$

Abel $\rightarrow$ $\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{S_k(x)-S_{k-1}(x)}{k^\alpha}$

$= \sum_{k=1}^{n} \dfrac{S_k(x)}{k^\alpha} - \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{S_k(x)}{(k+1)^\alpha}$

$= \sum_{k=1}^{n-1} S_k(x)\left(\dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{1}{(k+1)^\alpha}\right) + \underbrace{\dfrac{S_n(x)}{n^\alpha}}_{\leqslant \frac{c(x)}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} - 1$

$\left|S_k(x)\times\left(\dfrac{1}{k^\alpha}-\dfrac{1}{(k+1)^\alpha}\right)\right| \leqslant c(x)\times\left(\dfrac{1}{k^\alpha}-\dfrac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$

$\sum \dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{1}{(k+1)^\alpha}$ c, donc $\sum S_k(x)\left(\dfrac{1}{k^\alpha}-\dfrac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$ est AC,

donc $\sum f_k(x)$ converge

$\boxed{\sum f_n \text{ CS sur } \mathbb{R}.}$

- $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha}$ $\qquad$ $\boxed{\alpha>1 \Rightarrow \sum f_n \text{ CN sur } \mathbb{R}.}$

$\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = \dfrac{1}{n^\alpha}$ $\qquad$ $\boxed{\alpha>1 \Leftrightarrow \sum f_n \text{ CN sur } \mathbb{R}}$

- Supposons $0<\alpha<1$:

$$\sum_{k=n+1}^{p} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{p-1} S_k(x) \times \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right) + \frac{S_p(x)}{p^\alpha} - \frac{S_n(x)}{n^\alpha}$$

Quand $p \to +\infty$:

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} S_k(x)\left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right) - \frac{S_n(x)}{n^\alpha}.$$

Pour $\theta \in]0,\pi[$: pour $x \in [\theta, 2\pi-\theta]$: $\sin\frac{x}{2} \geq \sin\frac{\theta}{2}$

$$|S_n(x)| \leq c(x) \leq c = \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

$$|R_n(x)| \leq c \times \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} + \frac{c}{n^\alpha} = \frac{c}{(n+1)^\alpha} + \frac{c}{n^\alpha}$$

$$\|R_n\|_\infty^{[\theta,2\pi-\theta]} \leq \frac{c}{n^\alpha} + \frac{c}{(n+1)^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\boxed{\sum f_n \text{ CU sur } [\theta, 2\pi-\theta]}$; et de même sur $[\theta+j2\pi, (2\pi+1)j-\theta]$, avec $j \in \mathbb{Z}$

- Suppo. que $\sum f_n$ CN sur $]0,\theta[$.

Posons $x_n = \frac{\pi}{2n} \longrightarrow 0$

$f_n(x_n) = \frac{1}{n^\alpha}$. donc $\sum f_n(x_n)$ diverge. Absurde.

$\boxed{\text{Pas de CN sur }]0,\theta[}$. De même, pas de CN sur $]j2\pi, \theta+j2\pi[$, avec $j\in\mathbb{Z}$

$](2\pi+1)j-\theta, (2\pi+1)j[$

- $(\ldots)$ On trouve $x_n \to 0$

tel que $R_n(x_n) \not\to 0$

$\boxed{\text{Pas de CU sur }]0,\theta[}$, ni sur $]j2\pi, \theta+j2\pi[$, $](2\pi+1)j-\theta, (2\pi+1)j[$

[24] • Posons $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

muni du produit scalaire $f, g \longmapsto \langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$.

Disposons de $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_n)$ une BON de $\mathbb{R}_n[X]$.

• Posons $g : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(\alpha_0 - \alpha_n) \longmapsto \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k - \exp \right)^2 = f\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k \right)$

$= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 - 2 \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \langle P_k, \exp \rangle + \|\exp\|^2$

$\partial^k g(\alpha_0 - \alpha_n) = 2\left(\alpha_k - \langle P_k, \exp \rangle\right)$

• $\nabla g(\alpha_0 - \alpha_n) = 0 \iff \forall k \in [\![0,n]\!], \alpha_k = \langle P_k, \exp \rangle$

$\iff P = \sum_{k=0}^{n} \langle P_k, \exp \rangle P_k$

$= p^{\perp}_{\mathbb{R}_n[X]}(\exp)$.

(il minimise la distance de exp à $\mathbb{R}_n[X]$)

$\boxed{25}$ ① $f \in C^1([0,1], \mathbb{R})$

IPP : $I_n = \int_0^1 \cos(2\pi n t) f(t)\, dt = \left[+ \frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi n t) f(t) \right]_0^1 - \frac{1}{2\pi n} \int_0^1 \sin(2\pi n t) f'(t)\, dt$

$$|I_n| \leq \frac{1}{2\pi n} \int_0^1 \|f'\|_\infty = \frac{\|f'\|_\infty}{2\pi n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

---

② $\forall (x,y) \in [0,1]^2, \ |f(x) - f(y)| \leq \lambda |x-y|$, avec $\lambda > 0$.

$0 \qquad k/2n \qquad 1$

$$I_n = \sum_{k=0}^{2n-1} \int_{k/2n}^{\frac{k+1}{2n}} \cos(2\pi n t) f(t)\, dt \qquad t' = t - \frac{k}{2n}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n-1} \int_0^{1/2n} \cos(2\pi n t + \pi k) f\left(t + \frac{k}{2n}\right) dt$$

$$= \int_0^{1/2n} \cos(2\pi n t) \times \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k f\left(t + \frac{k}{2n}\right) \right]}_{\sum_{k=0}^{n-1} f\left(t + \frac{2k}{2n}\right) - f\left(t + \frac{2k+1}{2n}\right)} dt$$

$$|I_n| \leq \int_0^{1/2n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda \times \frac{1}{2n}\, dt = \frac{\lambda}{2} \times \frac{1}{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$\boxed{26}$ • $\lim\limits_{q\to+\infty} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} = +\infty$, donc p_n existe

• $n \leq \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{p_n} 1 = p_n$ donc $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

• $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$
$(k \geq 2)$

$$\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \leq \alpha_k = \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} - \frac{1}{k} < 0$$

$\sum \alpha_k$ converge,

donc $\left(\int_1^{q+1} \frac{dt}{t} - \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k}\right)_{q\in\mathbb{N}}$ converge vers $-\gamma$, avec $\gamma < 0$

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} = \int_1^{q} \frac{dt}{t} + \gamma + o(1)$$
$$= \ln q + \gamma + o(1)$$

(*) $\left(\int_q^{q+1} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{q+1}{q}\right) \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0\right)$

• Mque : $\ln(p_{n+1}) - \ln(p_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

(*) $\longrightarrow$ $\ln(p_{n+1}) - \ln(p_n) = \sum_{k=p_n+1}^{p_{n+1}} \frac{1}{k} + o(1)$.

• Or : $\sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k} \geq n$ (1)

$\sum_{k=1}^{p_n-1} \frac{1}{k} < n$ (2)

$\sum_{k=1}^{p_{n+1}} \frac{1}{k} \geq n+1$ (3)

$\sum_{k=1}^{p_{n+1}-1} \frac{1}{k} < n+1$ (4)

$(3)-(2)$: $\displaystyle\sum_{k=p_n}^{p_{n+1}} \frac{1}{k} > 1$ (A)

$(4)-(1)$: $\displaystyle\sum_{k=p_n+1}^{p_{n+1}-1} < 1$ (B)

$(*)$ et $(A) \longrightarrow$ $\ln(p_{n+1}) - \ln(p_n) = \displaystyle\sum_{k=p_n}^{p_{n+1}} \frac{1}{k} - \frac{1}{p_n} + o(1).$

$> 1 + o(1)$

$(*), (B) \longrightarrow$ $\ln(p_{n+1}) - \ln(p_n) = \displaystyle\sum_{k=p_n+1}^{p_{n+1}-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{p_{n+1}} + o(1)$

$< 1 + o(1)$

Par encadrement, $\ln(p_{n+1}) - \ln(p_n) \longrightarrow 1$

$\dfrac{p_{n+1}}{p_n} \longrightarrow e$

$\boxed{27}$ • <u>CN</u> : Supposons que (f_n) CS vers f. ↓ 37

Alors $f(x) + \frac{1}{2}(x - f(x)^2) = f(x)$, <u>donc</u> $f(x)^2 = x$.

• <u>CS</u> :

$$\sqrt{x} - f_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - f_n(x)) \times \left[1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + f_n(x))\right].$$

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \sqrt{x} \Rightarrow 0 \leqslant 1 - \sqrt{x} \leqslant 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + f_n(x)) \leqslant 1 - \frac{\sqrt{x}}{2} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \sqrt{x} - f_{n+1}(x) \leqslant \sqrt{x} - f_n(x)$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant \sqrt{x}$$

Par récurrence : $\forall n,\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \sqrt{x}$.

Théo de la limite monotone : $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{x}$ $\boxed{(f_n) \text{ CS vers } x \mapsto \sqrt{x}}$

$$\sqrt{x} - f_n(x) \leqslant \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$$

$h : t \mapsto t\left(1 - \frac{t}{2}\right)^n$ est max. en $t = \frac{2}{n+1}$.

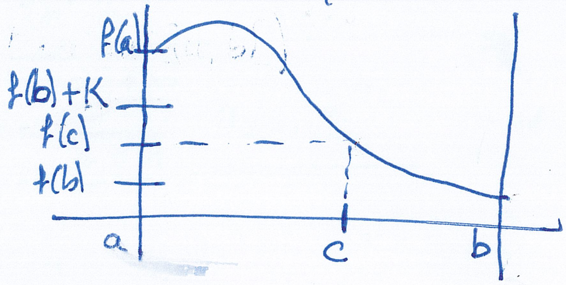
$$\|\sqrt{\ } - f_n\|_\infty^{[0,1]} = h\left(\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1} \times e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$\boxed{(f_n) \text{ CU sur } [0,1] \text{ vers } \sqrt{\ }}$

[20] • <u>Supposons (a). f est $\uparrow$</u> Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ tq $f-\varphi$ admet un min. local en x_0.

$(f-\varphi)'(x_0) = 0$ donc $\varphi'(x_0) = f'(x_0) \geq 0$

• <u>Supposons (b) :</u> <u>Par l'absurde :</u> Supposons qu'il existe $a<b$ tel que $f(a)>f(b)$.



$\exists c \in]a,b[$ tq $f(b) < f(c) < f(a)$ (TVI)

$\exists K>0$, $f(a) > f(b)+K > f(c) > f(b)$

Posons $\varphi : x \longmapsto -K\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n$. $\quad \frac{c-a}{b-a} \in]0,1[$.

$(f-\varphi)(c) = f(c) + K\left(\frac{c-a}{b-a}\right)^n$

$\exists n>1$, $K\left(\frac{c-a}{b-a}\right)^n < f(b)+K-f(c) < f(a)-f(c)$

$(f-\varphi)(c) < (f-\varphi)(b) = f(b)+K < f(a) = (f-\varphi)(a)$

Théo des bornes atteintes $\longrightarrow$ $\min\limits_{[a,b]} f-\varphi = f-\varphi(d)$ avec $d \in]a,b[$.

D'après (b) : $\varphi'(d) \geq 0$. Or φ est strict $\downarrow$ sur $]a,b[$. <u>Absurde</u>

<u>(a) est vraie.</u>

$\boxed{29}$ (*) <u>Par l'absurde :</u> Supposons $y > 0$ sur $[a, +\infty[$

- $y'' = -fy < 0$. y est concave, y' est $\downarrow$

$\lim\limits_{+\infty} y' = M$. • <u>1er cas : $M \geq 0$</u>

$y' > 0$, y est $\uparrow$ ~~sur~~ un voisinage de $+\infty$ $[b, +\infty[$

- $y''(x) = -f(x)y(x) \leq -f(x) \times y(b)$

$y'(x) - y'(b) \leq -y(b) \int_b^x f$

Or $\int_b^x f \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, donc $\lim\limits_{+\infty} y' = -\infty$ <u>Absurde.</u>

- <u>2ème cas : $M < 0$</u>

$\lim\limits_{+\infty} y = -\infty$. <u>Absurde.</u>

- <u>Contre-exemple quand $\int_0^{+\infty} f$ converge.</u> $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

$\boxed{30}$ $I_n = \int_a^b f(tn)\,dt = \int_{na}^{nb} f(t) \times \frac{dt}{n}$.

CV : $t' = tn$

Disposons de $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que $pT \leqslant na < (p+1)T < \dots < qT \leqslant nb < (q+1)T$

$$\left(p = \left\lfloor \frac{na}{T} \right\rfloor,\ q = \left\lfloor \frac{nb}{T} \right\rfloor \right)$$

$$n I_n = \int_{na}^{(p+1)T} f(t) \times \frac{dt}{n} + \int_{qT}^{nb} f(t) \times \frac{dt}{n} + \underbrace{\sum_{k=p+1}^{q-1} \underbrace{\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\,dt}_{\int_0^T f(t)\,dt}}_{(q-p-1)\int_0^T f(t)\,dt}$$

(CV : $t' = t - kT$)

$$\left. \begin{array}{l} \left| \int_{na}^{(p+1)T} f \right| \leqslant \int_0^T |f| \\ \left| \int_{qT}^{nb} f \right| \leqslant \int_0^T |f| \end{array} \right\} \text{donc } \frac{1}{n}\left(\int_{na}^{(n+1)T} f + \int_{qT}^{nb} f \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$p \sim \frac{na}{T}$ donc $\frac{p}{n} \longrightarrow \frac{a}{T}$, $\frac{q}{n} \longrightarrow \frac{b}{T}$.

$$\boxed{I_n \longrightarrow \frac{b-a}{T} \times \int_0^T f}$$