31 ✱ Supposons que (σ_n) converge (i) : 41

- $S_n = (n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1} = O(n)$ donc $\boxed{R \geq 1}$.

- Pour $x \in [0,1[$: (double transformation d'Abel)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (S_n - S_{n-1}) x^n + a_0$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n x^n - x \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$$

$$= (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$$

$$= (1-x) \times \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \big((n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1}\big) x^n + S_0 \right]$$

$n' = n-1$

$$= (1-x) \left[\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\sigma_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\sigma_n x^{n+1} \right]$$

$$= (1-x)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\sigma_n x^n$$

$$= (1-x)^2 \times \left[\sigma \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\varepsilon_n x^n \right] \quad \left(\sigma_n = \sigma + \varepsilon_n, \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0 \right)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f(x) = \sigma + (1-x)^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\varepsilon_n x^n}_{\to A_n(x)}$$

Prenons $\varepsilon > 0$: $\exists N_0, \ \forall n \geq N_0, \quad |\varepsilon_n| < \varepsilon$.

$$|A_n(x)| \leq \underbrace{\left| \sum_{n=0}^{N_0} (n+1)\varepsilon_n x^n \right|}_{A} + \varepsilon \underbrace{\sum_{n=N_0+1}^{+\infty} (n+1) x^n}_{\leq \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n = \frac{1}{(1-x)^2}}$$

$$|f(x) - \sigma| \leq A(1-x)^2 + \varepsilon$$

$\exists \alpha \in]0,1[, \ \forall x \in]\alpha,1[, \ A(1-x)^2 < \varepsilon$

$\forall x \in]\alpha,1[, \quad |f(x) - \sigma| < \varepsilon$

$$\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = \sigma = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n}$$

(*) **Rq :** On retrouve le théo. d'Abel radial :

(S_n) converge $\Rightarrow \begin{cases} R \geq 1 \\ \lim\limits_{1^-} f = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n \end{cases}$

(en effet : (S_n) converge $\underset{\text{Césaro}}{\Rightarrow}$ (σ_n) converge)

(*) **La réciproque est fausse :** **Exemple 1 :**

Posons $a_n = n(-1)^n$,

$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(-x)^n$

$= x \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(-x)^{n-1}$

$= \dfrac{x}{(1+x)^2} \underset{x \to 1}{\longrightarrow} \dfrac{1}{4}$

$\begin{cases} S_{2n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{2k} + a_{2k+1} = -(n+1) \\ S_{2n} = S_{2n-1} + a_{2n} = n-1 \end{cases}$ (S_n) diverge

(La réciproque du théo. d'Abel radial est fausse)

$\begin{cases} \sigma_{2n} = \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} S_{2k} + S_{2k+1} = -2 \\ \sigma_{2n+1} = \sigma_{2n-1} + \dfrac{S_{2n}}{n+1} = -2 + \dfrac{n-1}{n+1} \end{cases}$ (σ_n) diverge.

Exemple 2 :

Posons $\begin{cases} a_n = (-1)^n - (-1)^{n-1} \text{ pour } n \geq 1, \\ a_0 = 1 \end{cases}$ $S_n = (-1)^n$ $\begin{cases} \sigma_{2n} = 1/n+1 \\ \sigma_{2n+1} = 0 \end{cases}$

$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} x^n$

$= \dfrac{2}{1+x} - 1 \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 0$

(σ_n) converge mais (S_n) diverge.

La réciproque du théo de Cesaro est fausse !

[32] Supposons $C = \frac{p}{q} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}$ avec $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$.

$a_k \in [\![0;9]\!]$

$$p = q \times \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}$$

• Pour $N \in \mathbb{N}^*$: $10^N p = q \times \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{N-k} = q \times \left(\sum_{k=1}^{N} a_k \overbrace{10^{N-k}}^{\in \mathbb{N}} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k \overbrace{10^{N-k}}^{\in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}} \right)$

DE de $10^N p$ par $q \longrightarrow 10^N p = q \times m + r$, avec $m \in \mathbb{N}$, $r \in [\![0, q-1]\!]$.

N varie dans $\mathbb{N}^*$ et r varie dans $[\![0, q-1]\!]$,

donc on dispose de $(N, N') \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que $N < N'$ et $\begin{cases} 10^N p = q \times m + r \\ 10^{N'} p = q \times m' + r \end{cases}$

$$(10^{N'} - 10^N)\, p = (m' - m)\, q$$

donc $m' - m = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{N'-k} - \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{N-k} = \underset{\in \mathbb{Z}}{A} + \underbrace{\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k 10^{N-k} - \sum_{k=N'+1}^{+\infty} a_k 10^{N'-k}}_{\in]0,1[}$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} (a_{k+N'} - a_{k+N})\, 10^{-k} + A$$

donc : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_{k+N'} = a_{k+N}$.

$(a_k)_{k \geq N+1}$ est $N'-N$ périodique

• Or l'écriture de c n'est pas périodique,

donc $c \notin \mathbb{Q}$.

$\boxed{33}$ $n = \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ Mieux que 2 si $p \geq N$.

$\ln(n) = \sum \alpha_i \ln p_i \geq (\ln 2) \sum \alpha_i$

$z(n) = \prod (1+\alpha_i)$

$\ln z(n) = \sum \ln(1+\alpha_i)$

1er jet : $\ln z(n) \leq \sum \alpha_i \leq \frac{\ln(n)}{\ln 2}$ → Mieux que 2 :

$$\ln \frac{z(n)}{n^u} \leq \ln(n) \left(\frac{1}{\ln 2} - u\right) \longrightarrow -\infty \iff u > \frac{1}{\ln 2}.$$

2ème jet : Pour $N \geq 2$:

$$\ln z(n) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ p_i < N}} \ln(1+\alpha_i) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ p_i \geq N}} \ln(1+\alpha_i)$$

(Cas part pic : $N=2$)

$$\ln(n) = \sum_{p_i < N} \alpha_i \ln p_i + \sum_{p_i \geq N} \alpha_i \ln p_i$$

$$\geq \sum_{p_i \geq N} \alpha_i \ln p_i$$

$$\geq \ln N \times \sum_{p_i \geq N} \alpha_i$$

$$\ln \frac{z(n)}{n^u} \leq \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ p_i < N}} \ln(1+\alpha_i) + \ln(n) \left(\frac{1}{\ln(N)} - u\right).$$

Pour $p \in \mathcal{P} \cap [\![2, N[\![$: posons $v_n(p) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } p = p_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\ln(1+\alpha_i) \underset{\alpha_i \to +\infty}{=} o(\alpha_i \ln p_i)$$

donc $\ln(1+\alpha_i) = \ln(1+v_n(p)) \underset{n \to +\infty}{=} o(\ln n)$

Disposons de N tel que $\frac{1}{\ln(N)} < u$.

$$\ln \frac{z(n)}{n^u} \underset{n \to -\infty}{\cancel{= o(}} \to -\infty$$

$z(n) = o(n^u)$

34 Recherche de CN :

Supposons : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_{n,k})$, avec $\alpha_{n,k} \in [0,1]$

$$\frac{P_n'}{P_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - \alpha_{n,k}}$$

On peut supposer sans perte de généralité $a_0 \neq 0$, (sinon $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convient aussi)

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{P_n'(0)}{P_n(0)} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_{n,k}} \leqslant -n$$ Absurde.

35 $\circledast$ $\boxed{\text{Recherche de CS :}}$ Supposons que $f : x \longmapsto ax+b$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$\boxed{\text{Polycopié 5}}$

Pour $x \in \mathbb{R}$: $\forall h \in \mathbb{R},\ f(x+h) + f(x-h) = a(x+h)+b + a(x-h)+b$

$$= 2(ax+b) = 2f(x).$$

$$(*) \quad f(x+h) + f(x-h) \xrightarrow[h \to +\infty]{} 2f(x)$$

La propriété est vraie.

$\circledast$ $\boxed{\text{Recherche de CN :}}$ Supposons que f vérifie $(*)$.

- Posons $g : x \longmapsto f(x) - f(0)$

  g vérifie également $(*)$, et $g(0) = 0$

- Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$g(x+y) + g(x-y) = \lim_{h \to +\infty} \frac{g(x+y+h) + g(x+y-h) + g(x-y+h) + g(x-y-h)}{2}$$

$$= \lim_{h \to +\infty} \frac{g(x+y+h) + g(x-y-h)}{2} + \frac{g(x+y-h) + g(x-y+h)}{2}$$

$$= \lim_{h' \to +\infty} \frac{g(x+h') + g(x-h')}{2} + \lim_{h' \to +\infty} \frac{g(x+h') + g(x-h')}{2}$$

$$= g(x) + g(x) = 2g(x).$$

- Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$g(0.x) = 0 = 0g(x)$$
$$g(1x) = 1g(x)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} g(nx) = ng(x) \\ g((n-1)x) = (n-1)g(x) \end{cases} \Rightarrow g(nx+x) + g(nx-x) = 2g(nx)$$

$$\Rightarrow g((n+1)x) + (n-1)g(x) = 2ng(x)$$

$$\Rightarrow g((n+1)x) = (n+1)g(x)$$

On a montré par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ g(nx) = ng(x)$.

36 ① Supposons $f : x \longmapsto \cos(x) + \cos(\alpha x)$ T-périodique.

Méthode 1 : $f(T) = f(0)$

$\cos T + \cos(\alpha T) = 2$

$\cos T = \cos(\alpha T) = 1$

$T \equiv 0[2\pi]$ et $\alpha T \equiv 0[2\pi]$.

$T = 2\pi k$

$\alpha T = 2\pi k'$, avec $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$.

$\alpha = \frac{k'}{k} \in \mathbb{Q}$. Absurde.

Méthode 2 : $f'' : x \longmapsto -\cos x - \alpha^2 \cos(\alpha x)$ est T-périodique.

$\left(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x) \right.$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x+T) = f'(x)$

$\left. \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x+T) = f''(x) \right)$

$\alpha^2 f + f'' = \underbrace{(\alpha^2 - 1)}_{\neq 0} \cos$ est T-périodique.

cos est T-périodique, donc $T = 0[2\pi]$

donc $f - \cos : x \longmapsto \cos(\alpha x)$ est T-périodique

cos est αT-périodique, donc $\alpha T = 0[2\pi]$ ... Absurde

---

② On raisonne de même avec la méthode 2.

---

37 ① $X_2 = \sum_{k=1}^{X_1} Z_k$, avec $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ IID $\sim \mathcal{B}(1/2)$

Pour $t \in [-1,1]$:

$$\varphi_{X_2}(t) = \mathbb{E}(t^{X_2}) = \sum_{(k_1,k_2)\in[\![0,N]\!]^2} t^{k_2}\,\mathbb{P}\big((X_1=k_1)\cap(X_2=k_2)\big)$$

$$= \sum_{(k_1,k_2)\in[\![0,N]\!]^2} t^{k_2}\,\mathbb{P}\Big((X_1=k_1)\cap\Big(\sum_{i=1}^{k_1} Z_i = k_2\Big)\Big)$$

$$= \sum_{(k_1,k_2)\in[\![0,N]\!]^2} t^{k_2}\,\mathbb{P}(X_1=k_1)\times\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{k_1} Z_i = k_2\Big)$$

(Théo. de Fubini) $$= \sum_{k_1=0}^{N} \mathbb{P}(X_1=k_1)\,\varphi_{\sum_{i=1}^{k_1} Z_i}(t)$$

$$= \sum_{k_1=0}^{N} \mathbb{P}(X_1=k_1)\times\left[\varphi_{Z_i}(t)\right]^{k_1} = \varphi_{X_1}\circ\varphi_{Z_i}(t)$$

Or $\varphi_{Z_i}(t) = \dfrac{t+1}{2}$; $\varphi_{X_1}(t) = \left[\dfrac{t+1}{2}\right]^N$

donc $\boxed{\varphi_{X_2}(t) = \left[\dfrac{t}{4}+\dfrac{3}{4}\right]^N}$ $\qquad \varphi_{X_2} \sim \mathcal{B}(N, \tfrac14)$

② Supposons $\varphi_{X_k} : t \mapsto \left[\dfrac{t}{2^k} + 1 - \dfrac{1}{2^k}\right]^N$.

$X_{k+1} = \sum_{i=1}^{X_k} Z_i$, donc (cf ①) : $\varphi_{X_{k+1}}(t) = \varphi_{X_k}\circ\varphi_{Z_i}(t)$

$$= \left[\frac{\frac{t+1}{2}}{2^k} + 1 - \frac{1}{2^k}\right]^N = \left[\frac{t}{2^{k+1}} + 1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right]^N$$

$X_k \sim \mathcal{B}(N, \frac{1}{2^k})$

③ $T = \min\{k\in\mathbb{N}^*,\ X_k = 0\}$, $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(T>k) = \mathbb{P}(X_k>0) = 1-\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^4 = \frac{4}{2^k} - \frac{6}{4^k} + \frac{4}{8^k} - \frac{1}{16^k}.$$

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(T>k) = 4\times 2 - 6\times\frac43 + 4\times\frac87 - \frac{16}{15} = 8 - 8 + \frac{32}{7} - \frac{16}{15} = \frac{68}{105}$$

$\boxed{38}$ Posons : P_n : Pile au $n$ème lancer.

① • $S_n(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$. $(S_n = n-1) = \bigcap_{k=1}^{n} P_k$

$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_k$ en posant $X_k = \mathbb{1}_{P_k \cap P_{k+1}} \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{4}\right)$.

• $E(S_n) = \sum_{k=1}^{n-1} E(X_k) = \boxed{\frac{n-1}{4}}$.

• $V(S_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n-1} Cov(X_i, X_j)$ Pour $n \geq 2$:

$= \sum_{i=1}^{n-1} V(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-2} Cov(X_i, X_{i+1}) + 2 \underbrace{\sum_{\substack{i<j \\ j \notin \{i, i+1\}}} Cov(X_i, X_j)}_{0 \text{ (lemme des coalitions)}}$

$Cov(X_i, X_{i+1}) = E(X_i X_{i+1}) - E(X_i) E(X_{i+1})$

$= E(\mathbb{1}_{P_i \cap P_{i+1} \cap P_{i+2}}) - E(X_i)^2$

$= \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$.

$V(X_i) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$.

$V(S_n) = \frac{3}{16} \times (n-1) + 2(n-2) \times \frac{1}{16} = \boxed{\frac{5n-7}{16}}$. $\left(V(S_2) = \frac{3}{16} = V(X_1), \; S_2 = \mathbb{1}_{P_1 \cap P_2} \right)$.

• $S_1 = 0$ $\boxed{V(S_1) = 0}$

② • $T(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$

Posons $p_k = \mathbb{P}(T=k)$

$(T=2) = P_1 \cap P_2 = (S_2 = 1)$ $\boxed{p_2 = \frac{1}{4}}$ $\boxed{p_1 = 0}$

• Pour $k \geq 3$:

$$(T=k) = \left(\overline{P_1} \cap (T=k)\right) \sqcup \left(P_1 \cap \overline{P_2} \cap (T=k)\right) \sqcup \underbrace{\left(P_1 \cap P_2 \cap (T=k)\right)}_{\emptyset}$$

$$\mathbb{P}(T=k) = \frac{1}{2} \times \underbrace{\mathbb{P}(T=k \mid \overline{P_1})}_{p_{k-1}} + \frac{1}{4} \underbrace{\mathbb{P}(T=k \mid P_1 \cap \overline{P_2})}_{p_{k-2}}$$

$$\boxed{p_k = \frac{1}{2} p_{k-1} + \frac{1}{4} p_{k-2}}$$

• Pour $t \in [-1, 1]$:

$$G_T(t) = \mathbb{E}(t^T) = \sum_{k=2}^{+\infty} t^k p_k$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{+\infty} t^k p_{k-1} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{+\infty} t^k p_{k-2} + t^2 p_2$$

$$= \frac{1}{2} t \sum_{k=2}^{+\infty} t^k p_k + \frac{1}{4} t^2 \sum_{k=1}^{+\infty} t^k p_k + \frac{t^2}{4}$$

$$= \frac{t}{2} G_T(t) + \frac{t^2}{4} G_T(t) + \frac{t^2}{4}$$

$$\boxed{G_T(t) = \frac{t^2}{4 - 2t - t^2}} \quad \left(G_T(1) = 1, \ G_T(0) = 0 = \mathbb{P}(T=0)\right)$$

• $G_T(t) = \dfrac{t^2}{(t-a)(b-t)} = t^2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \left(\dfrac{1}{b-t} - \dfrac{1}{a-t}\right)$ en posant $a = -1-\sqrt{5}$, $b = -1+\sqrt{5}$

$$= \frac{t^2}{2\sqrt{5}} \times \left(\frac{\beta}{1-\beta t} - \frac{\alpha}{1-\alpha t}\right) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1}{a} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \quad \beta = \frac{1}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{t^2}{2\sqrt{5}} \left(\beta \sum_{k=0}^{+\infty} (\beta t)^k - \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} (\alpha t)^k\right) = \sum_{k=2}^{+\infty} a_k t^k.$$

en posant $a_k = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}\left(\beta^{k-1} - \alpha^{k-1}\right)$ $\boxed{\text{Unicité du DSE} \longrightarrow p_k = a_k.}$

$\boxed{39}$ ① $\mathcal{D}(n) = \{a \times k,\ k \in [\![1, \frac{n}{a}]\!]\}$ Soit $a \in \mathbb{N}$ tq $a \mid n$, $n \in \mathbb{N}^*$

$\text{card}\, \mathcal{D}(n) = \frac{n}{a}$

$\mathbb{P}(\mathcal{D}(n)) = \frac{\frac{n}{a}}{n} = \frac{1}{a}$

---

② $\forall k \in [\![1, n]\!],\ k \in \mathcal{D}(p_1) \cap \dots \cap \mathcal{D}(p_r)$

$\iff \forall j \in [\![1, r]\!],\ p_j \mid k$

$\iff p_1 \cdots p_r \mid k$ $(p_1 \cdots p_r$ 1ers entre eux 2 à 2)

$\iff k \in \mathcal{D}(p_1 \cdots p_r)$

$\mathcal{D}(p_1) \cap \dots \cap \mathcal{D}(p_r) = \mathcal{D}(p_1 \cdots p_r)$

$\mathbb{P}(\mathcal{D}(p_1) \cap \dots \cap \mathcal{D}(p_r)) = \mathbb{P}(\mathcal{D}(p_1 \cdots p_r)) = \frac{1}{p_1 \cdots p_r} = \frac{1}{p_1} \times \dots \times \frac{1}{p_r}$

$= \mathbb{P}(\mathcal{D}(p_1)) \times \dots \times \mathbb{P}(\mathcal{D}(p_r))$

$\mathcal{D}(p_1) \dots \mathcal{D}(p_r)$ sont ╨

---

③ $B = \{k \in [\![1, n]\!],\ k \wedge n = 1\} = \{k \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, r]\!],\ p_j$ ne divise pas $k\}$.

$= \bigcap_{j=1}^{r} \overline{\mathcal{D}(p_j)}$

$\mathbb{P}(B) = \prod_{j=1}^{r} \overline{\mathcal{D}(p_j)}$ (par indépendance)

$= \prod_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$

---

④ $\varphi(n) = \text{card}(B) = \mathbb{P}(B) \times n$

$= n \prod_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$

$\boxed{40}$ $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ IID $\sim \mathcal{G}(p)$

① $\mathbb{E}(X_1 \mathbb{1}_{(X_1 \geq N+1)}) = \overset{*}{\cdots} = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}: \\ k\geq N+1}} k\mathbb{P}(X_1 \geq N+1)$

$= \sum_{k=N+1}^{+\infty} k p (1-p)^{k-1} = p f'(1-p)$

en posant $f : x \mapsto \sum_{k=N+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^{N+1}}{1-x}$ $(1-p \in]-1,1[$, int. ouvert de conv de la SE$)$

$f'(x) = \frac{(N+1)x^N - N x^{N+1}}{(1-x)^2}$.

$$\boxed{\mathbb{E}(X_1 \mathbb{1}_{(X_1 \geq N+1)}) = \frac{1}{p}\left((N+1)(1-p)^N - N(1-p)^{N+1}\right)}$$

② Soit $\omega \in \Omega$. $\exists k \in \mathbb{N}$, $M_n(\omega) = X_k(\omega)$

1er cas : $M_n(\omega) \leq N$ Alors $M_n(\omega) \leq N + \sum_{k=1}^{n} X_k \mathbb{1}_{X_k \geq N+1}(\omega)$

2ème cas : $M_n(\omega) > N$.

Alors : $M_n(\omega) = X_{k_0}(\omega) \mathbb{1}_{(X_{k_0} \geq N+1)}(\omega) \leq N + \sum_{k=1}^{n} X_k \mathbb{1}_{X_k \geq N+1}(\omega)$

On a montré : $M_n \leq N + \sum_{k=1}^{n} X_k \mathbb{1}_{X_k \geq N+1}$

③. Soit $\alpha > 0$: Par $\nearrow$ de l'espérance : pour $N \in \mathbb{N}$

$\mathbb{E}(M_n) \leq N + n \times \frac{1}{p}\left[(N+1)(1-p)^N - N(1-p)^{N+1}\right]$

- Disposons de $\beta \in]0, \alpha[$ et posons $N = \lfloor n^\beta \rfloor$

$N \underset{n\to+\infty}{\sim} n^\beta$ donc $N = o(n^\alpha)$

Par somme : $\mathbb{E}(M_n) = o(n^\alpha)$