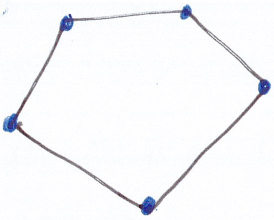
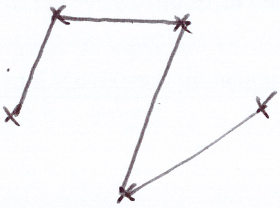
41 • Graphe planaire : dont les arêtes ne se coupent pas



$s = 5$ $\quad$ s : nb. de sommets.

$a = 5$ $\quad$ a : nb. d'arêtes,

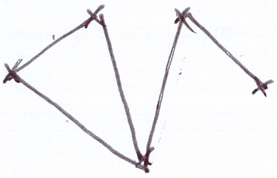
$f = 2$ $\quad$ f : nb. de faces.



$s = 5$

$a = 4$

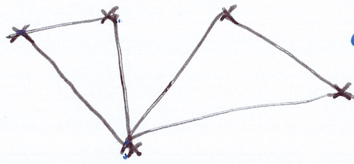
$f = 1$



$s = 5$

$a = 5$

$f = 2$



$s = 5$

$a = 6$

$f = 3$

• Montrons $s - a + f = 2$ par récurrence sur f. , $f = a - s + 2$

Pour $f = 1$: ligne brisée : $a = s - 1$ Relation vraie.

Supposons la prop. vraie pour $f - 1$.

Pour un graphe à $f \geq 2$ faces, on retire une arête d'un cycle

$\rightarrow$ on a $f - 1$ faces,

$a - 1$ arêtes

s sommets

Or $(f-1) + s - (a-1) = 2$

$f + s - a = 2$

• $a \leq 3s - 6 \iff a \leq 3(s-2) = 3(a-f) \iff 2a \geq 3f$.

On compte chaque faces autant de fois que ses arêtes :

Chaque face est délimitée par au moins 3 arêtes : $S \geq 3f$

Chaque arête délimite 2 faces : $S = 2a$

$2a \geq 3f$

$a \leq 3s - 6$

42 • $G_{S_n}(t) = \mathbb{E}(t^{S_n}) \underset{(X_1 \ldots X_n \text{ IID})}{=} \left[G_{X_1}(t)\right]^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) \times t^k.$

• Pour $N \in \mathbb{N}$: $\quad G_{S_n}\left(e^{i\frac{N\pi}{2}}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k)\, e^{i\frac{N\pi}{2}k}$

$k \equiv 0[4] \Rightarrow \sum_{N=0}^{3} e^{i\frac{N\pi k}{2}} = 4$

$k \not\equiv 0[4] \Rightarrow \sum_{N=0}^{3} e^{i\frac{N\pi k}{2}} = 0$

donc $\sum_{N=0}^{3} G_{S_n}\left(e^{i\frac{N\pi}{2}}\right) = 4 \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 4k) = 4\,\mathbb{P}(4 \mid S_n).$

• Posons $f = G_{X_1}$. $\quad f(1) = 1$

$4\,\mathbb{P}(4 \mid S_n) = \sum_{N=0}^{3} f\left(e^{i\frac{N\pi}{2}}\right)^n.$

$= 1 + \sum_{N=1}^{3} f\left(e^{i\frac{N\pi}{2}}\right)^n.$

Pour $N \in [\![1,3]\!]$: $\quad \left|f\left(e^{i\frac{N\pi}{2}}\right)\right| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k) \times e^{i\frac{N\pi}{2}k}\right| \leqslant \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k)}_{=1}$

et $\left|f\left(e^{i\frac{N\pi}{2}}\right)\right| = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k) \underset{(\ldots)}{\Longrightarrow} \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_1 = k) = 0$

ou $\arg\left(\mathbb{P}(X_1 = k)\, e^{\frac{iN\pi k}{2}}\right) = C\,[2\pi]$

$\Rightarrow \arg\left(\mathbb{P}(X_1 = 0)\right) = \arg\left(\mathbb{P}(X_1 = k)\, e^{i\frac{N\pi}{2}}\right) [2\pi]$

$\Rightarrow \frac{N\pi}{2} \equiv 0\,[2\pi]$ Faux.

Ainsi : $\quad f\left(e^{i\frac{N\pi}{2}}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

et $\boxed{4\,\mathbb{P}(4 \mid S_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.}$