$\boxed{13}$ • Pour $x \in B = \bar{B}(0,1)$:

$y \longmapsto f(y) + \|y - x\|$ est continue sur le fermé borné B de $\mathbb{R}^n$, de dim. finie

donc, d'après le théorème d'atteinte des bornes,

admet un minimum sur B.

g est définie sur B

• Pour $(x, x') \in B^2$:

On dispose de $y' \in B$ tel que $g(x') = f(y') + \|y' - x'\|$

Or $g(x) = \min\limits_{y \in B} \{f(y) + \|y - x\|\}$ donc $g(x) \leq f(y') + \|y' - x\|$

$$g(x) - g(x') \leq f(y') + \|y' - x\| - f(y') - \|y' - x'\|$$

$$= \|y' - x\| - \|y' - x'\| \leq \|x - x'\|$$

g est 1-lipschitzienne

[14] ⊛ Posons $F = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix},\ (A,B) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R}) \right\}$

F est un sous-ev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\dim F = r \times n$

$F \ni J_r$.

$\forall M \in F,\ \operatorname{rg} M \leqslant r$ | F convient |

⊛ Recherche de CN : Considérons F une éventuelle solution.

Posons $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0_r & B \\ B^T & D \end{pmatrix},\ (D,B) \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R}) \right\}$

$\dim G = r(n-r) + (n-r)^2 = n^2 - nr.$

Prenons $M \in F \cap G$

$$M = \begin{pmatrix} 0_r & B \\ B^T & D \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $M + \lambda J_r \in F$

Or $M + \lambda J_r = \left(\begin{array}{c|c} \lambda J_r & B \\ \hline B^T & D \end{array}\right)$ $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{\lambda} B^T L_1 \leftarrow$ suite d'op. élémentaires sur les lignes

$$\sim_{\ell} \left(\begin{array}{c|c} \lambda J_r & B \\ \hline 0_{n-r,r} & D - \frac{1}{\lambda} B^T B \end{array}\right)$$ $C_2 \leftarrow C_2 - \frac{1}{\lambda} C_1 B \leftarrow$ suite d'op. élémentaires sur les colonnes.

$$\sim_{c} \left(\begin{array}{c|c} J_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & D - \frac{1}{\lambda} B^T B \end{array}\right)$$

$\mathrm{rg}(M+\lambda I_r) = r + \mathrm{rg}(D - \frac{1}{\lambda} B^T B) \leq r$,

$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $D - \frac{1}{\lambda} B^T B = 0$

donc $D = B^T B = 0$

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|BX\|^2 = X^T B^T B X = 0$

$B = 0$

$M = O_n$.

$F \cap G = \{O_n\}$

$\dim F + \dim G = \dim(F+G) \leq n$

$\dim F \leq n - \dim G = nr$

La dimension maximale est nr.

Rem : Méthode 2 Pour étudier $\mathrm{rg}(M+\lambda I_n) = \begin{pmatrix} \lambda I_r & B \\ B^T & D \end{pmatrix}$

Pour $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \begin{matrix}]r \\ ]n-r \end{matrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$(M+\lambda I_n)Z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda X + BY = 0 \\ B^T X + DY = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = -\frac{1}{\lambda} BY \\ \left(-\frac{1}{\lambda} B^T B + D\right) Y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y \in \mathrm{Ker}\left(D - \frac{1}{\lambda} B^T B\right) \\ X = -\frac{1}{\lambda} BY \end{cases}$$

$\mathrm{Ker}(M+\lambda I_n)$ et $\mathrm{Ker}(D - \frac{1}{\lambda} B^T B)$ sont isomorphes.

$$\left(\begin{array}{rcl} \varphi : \mathrm{Ker}(D - \frac{1}{\lambda} B^T B) & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(M+\lambda I_n) \text{ est un isomorphisme} \\ Y & \longmapsto & \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda} BY \\ Y \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

$$\dim \operatorname{Ker} \underbrace{(M+\lambda J_r)}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \dim \operatorname{Ker} \underbrace{\left(D-\frac{1}{\lambda} B^T B\right)}_{\in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})}$$

$$n - \operatorname{rg}(M+\lambda J_r) = n - r - \operatorname{rg}\left(D-\frac{1}{\lambda} B^T B\right)$$

$$\operatorname{rg}(M+\lambda J_r) = r + \operatorname{rg}\left(D-\frac{1}{\lambda} B^T B\right).$$

(*) Rem : Supposons

$$M = \begin{array}{c} \\ r \\ n-r \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \end{array}.$$

Montrons $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} D$

$$\operatorname{rg} M = \dim \operatorname{vect}(C_1^M, \dots C_r^M, C_{r+1}^M, \dots C_n^M)$$

$$= \dim \left(\operatorname{vect}(C_1, \dots C_r) \oplus \operatorname{vect}(C_{r+1} \dots C_n)\right)$$

car $\operatorname{vect}(C_1, \dots C_r) \subset \operatorname{vect}(E_1, \dots E_r)$

$\operatorname{vect}(C_{r+1}, \dots C_n) \subset \operatorname{vect}(E_{r+1}, \dots, E_m)$

$$= \operatorname{rg}(C_1 \dots C_r) + \operatorname{rg}(C_{r+1}, \dots C_n)$$

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix}$$

le rang de la matrice est le rang de ses lignes, dont certaines sont nulles.

$$= \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(D)$$

15 (1) Posons $C = (Q^{-1})^T B Q^{-1}$

- $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, donc : $C = O^T D O$, avec $\left| \begin{array}{l} O \in \mathcal{O}(n). \\ D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}). \end{array} \right.$
  $D = O C O^T$

- $B = Q^T C Q = Q^T O^T D O Q$
  $= P^T D P$, en posant $P = OQ \in GL_n(\mathbb{R})$.

$P^T P = Q^T \underbrace{O^T O}_{I_n} Q = A.$

- $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, $X^T C X = (Q^{-1}X)^T B \underbrace{(Q^{-1}X)}_{\neq 0_{n,1}} > 0$

donc $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

donc D a des coef. strictement positifs

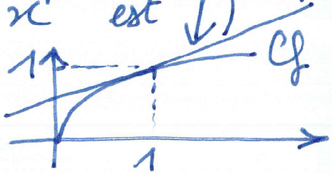
---

(2) Prenons $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$ tels que $\alpha + \beta = 1$.

$\det(\alpha A + \beta B) = \det(P^T(\alpha I_n + \beta D)P)$
$= \det P^T \times \det(\alpha I_n + \beta D) \times \det P$
$= (\det P)^2 \times \prod_{i=1}^{n} (\alpha + \beta d_{i,i}) = (\det P)^2 \times \prod_{i=1}^{n} (1 - \beta + \beta d_{i,i})$

$\det(A)^\alpha \times \det(B)^\beta = \det(P)^{2\alpha} \times (\det(P^T) \times \det(D) \times \det(P))^\beta$
$= \det(P)^{2\alpha + 2\beta} \times \det(D)^\beta$
$= \det(P)^2 \times \prod_{i=1}^{n} d_{i,i}^{\ \beta}$

Posons $f : x \longmapsto x^\beta$. f est concave sur $\mathbb{R}_+$ ($f' : x \longmapsto x^{\overbrace{\beta - 1}^{\leq 0}}$ est $\downarrow$)



$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq T_1(x) = f(1) + f'(1) \times (x - 1) = 1 + \beta(x - 1)$
$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $d_{i,i}^{\ \beta} \leq 1 - \beta + \beta d_{i,i}$ ($d_{i,i} > 0$).
donc $\det(\alpha A + \beta B) \geq \det A^\alpha \times \det B^\beta$

$\boxed{16}$ $\qquad e^{xt}\frac{\sin t}{t} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 1$, $\int_0^1 e^{xt}\frac{\sin t}{t}\,dt$ converge. $\qquad$ 21

- 1er cas : $x<0$: $\quad e^{xt}\frac{\sin t}{t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ $\quad$ $I(x)$ est AC

- 2ème cas : $x>0$.

$$S(n) = \int_0^{\pi n} e^{xt}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{xt}\frac{\sin t}{t}\,dt \quad \Big\downarrow t' = t-k\pi$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \underbrace{\int_0^{\pi} e^{x(t+k\pi)}\frac{\sin t}{t+k\pi}\,dt}_{\alpha_k}$$

$$\alpha_k \geq \frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^{\pi} e^{x(t+k\pi)}\sin t\,dt \geq \frac{e^{k\pi x}}{(k+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin t\,dt = \frac{2e^{k\pi x}}{(k+1)\pi}$$

$\alpha_k \underset{k\to+\infty}{\not\to} 0$ donc $(S(n))$ diverge donc $I(x)$ diverge.

- 3ème cas : $x=0$

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t}\,dt = \left[-\cos t \times \frac{1}{t}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\,dt \quad \text{donc } I(x) \text{ converge}$$

$$T(n) = \int_0^{\pi n}\frac{|\sin t|}{t}\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+k\pi}\,dt}_{\beta_k}$$

$$\beta_k \geq \frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin t\,dt = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

$\sum \beta_k$ diverge.

$(T(n))$ diverge

$I(x)$ n'est pas AC.

$\boxed{17}$ • f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$: $\mathcal{P}(n)$: " $\begin{cases}\exists P_n\in\mathbb{R}[X],\ f^{(n)} : x\mapsto P_n(x)e^{-x^2}\\ \deg(P_n)=n\end{cases}$

$f^{(0)}=f : x\mapsto 1\times e^{-x^2}$. $\mathcal{P}(0)$ est vrai.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ pour $n\in\mathbb{N}$: $\exists P_n\in\mathbb{R}[X]$, $\begin{cases} f^{(n)} : x\mapsto P_n(x)\times e^{-x^2}\\ \deg(P_n)=n.\end{cases}$

$f^{(n+1)} : x\mapsto (P_n'(x)-2xP_n(x))e^{-x^2}$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, en posant $P_{n+1}=P_n'-2XP_n$, $\deg(P_{n+1})=\deg(2XP_n)$
$=n+1$.

On a montré : $\forall n\in\mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

• P_n a au plus n racines.

$f^{(n)}$ a au plus n zéros. exactement

$f' : x\mapsto -2xe^{-x^2}$ a un zéro.

Supposons que $f^{(n)}$ admet n zéros $x_1<\dots<x_n$, pour $n\in\mathbb{N}^*$.
exactement

□ Si $n\geq 2$: D'après le théo de Rolle :

$\forall k\in[\![1,n-1]\!]$, $\exists y_k\in]x_k,x_{k+1}[$, $f^{(n+1)}(y_k)=0$

□ $f^{(n)}(x_n)=0$ et $\lim\limits_{+\infty}f^{(n)}=0$ (croissances comparées)

$\forall x>x_n$, $f^{(n+1)}(x)\neq 0\Rightarrow f^{(n+1)}$ de signe constant sur $[x_n,+\infty[$

$\Rightarrow f^{(n)}$ strict monotone

$\Rightarrow f^{(n)}=0$ sur $[x_n,+\infty[$ Absurde

$\exists y_n>x_n$, $f^{(n+1)}(y_n)=0$

De même : $\exists y_0<x_0$, $f^{(n+1)}(y_0)=0$

$f^{(n+1)}$ a au moins $n+1$ zéros,

donc a exactement

$\boxed{18}$ (1) Par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.

$\forall n,\ u_{n+1} \leqslant u_n$

(u_n) est $\downarrow$ minorée par 0, donc converge vers $\ell \geqslant 0$.

Par unicité de la limite : $\ell = \dfrac{\ell}{2+\ell}$ $\quad \ell\underbrace{(2+\ell)}_{>0} = \ell$ donc $\boxed{\ell = 0}$

---

(2) $u_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n}{2}$ donc $u_n \leqslant \dfrac{u_0}{2^n}$, $\boxed{u_n = O\left(\dfrac{1}{2^n}\right)}$

---

(3) Posons $w_n = \dfrac{1}{u_n}$.

$w_{n+1} = \dfrac{2+u_n}{u_n} = 2w_n + 1$

$w_{n+1} + 1 = 2(w_n + 1)$

$(w_n + 1)$ est géométrique.

$w_n + 1 = (w_0 + 1) \times 2^n$.

$u_n = \dfrac{1}{2^n\left(1+\frac{1}{u_0}\right) - 1} \boxed{\sim \dfrac{u_0}{u_0+1} \times \dfrac{1}{2^n}}$.

$\boxed{19}$ • $S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1-(1-a^k)^n\right)$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} a^{ki}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a^{ki}}$$

série convergente. Par linéarité, S_n est déf.

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \times \frac{(-1)^{i+1}}{1-a^i}.$$

• Posons $f_n : t \mapsto 1-(1-a^t)^n$. f_n est $\downarrow$, positive sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_k^{k+1} f_n \leq f_n(k) \leq \int_{k-1}^{k} f_n$ $(k \geq 1)$

$$\int_0^{+\infty} f_n \leq S_n \leq f_n(0) + \int_1^{+\infty} f_n$$

Quand $t \to +\infty$: $(1-\underbrace{a^t}_{\to 0})^n = 1 - na^t + o(a^t)$

$f_n(t) = 1-(1-a^t)^n \sim na^t$ donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

$$\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} \left[1-(1-a^t)^n\right] dt = \int_0^1 (1-u^n) \times \left(-\frac{du}{(\ln a)(1-u)}\right) = -\frac{1}{\ln a} \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^1 u^i$$

$(u = 1-a^t)$

$du = -\ln a \times a^t \, dt$

$$= -\frac{1}{\ln a} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1}.$$

$$= -\frac{1}{\ln a} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

• $\lim S_n = +\infty$ $(\ln a < 0)$

• $S_n \underset{(\dots)}{\sim} -\frac{\ln n}{\ln a}$

20 • E est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. 25

• Supposons $f \in E$ et f DSE sur $]-R,R[$.

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \ldots \qquad (n+1)a_{n+1} = (\alpha + \lambda^n) a_n$.

• Posons (a_n) tq $(n+1)a_{n+1} = (\alpha + \lambda^n) a_n$.

$f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de rayon $+\infty$, donc $f \in E$

• Soit $f \in E$. Posons $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!}\,dt$. $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty$ sur $[0,x]$

Par récurrence : $f^{(n)}(t) = \alpha f^{(n-1)}(t) + \lambda^{n-1} f^{(n-1)}(\lambda t)$.

$\|f^{(n)}\|_\infty^I \leq (|\alpha|+1)\|f^{(n-1)}\|_\infty^I \leq (|\alpha|+1)^n \|f\|_\infty^I$ avec I segment $I \supset [0,x]$

$|R_n(x)| \leq \|f\|_\infty^I \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \times (|\alpha|+1)^{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

f est DSE.

$\boxed{E = \mathrm{vect}(f_0) \text{ donc } \dim E = 1}$