$\boxed{2.1}$ • $P_1 - P_2$ change de signe en 0, $\boxed{\text{Ex 1}}$ 2.5

<u>donc</u> $(P_1 - P_2)(x) \underset{0}{\sim} a x^{2n+1}$, avec $a > 0$, $j \in \mathbb{N}$.

De même : $(P_3 - P_4)(x) \underset{0}{\sim} b x^{2p+1}$, avec $b, c > 0$

$(P_1 - P_4)(x) \underset{0}{\sim} c x^{2q+1}$

$(P_3 - P_1)(x) \sim d x^{2j}$, avec $d, e, f > 0$

$(P_4 - P_2)(x) \sim e x^{2i}$

$(P_3 - P_2)(x) \sim f x^{2k}$

Ainsi : • $(P_3 - P_1)(x) = d x^{2j} + o(x^{2j})$

$= f x^{2k} + o(x^{2k}) - a x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$

<u>donc</u> <u>$n \geq k = j$</u> et $f = d$.

De même, en examinant $P_3 - P_4$: $f = e$ et <u>$p \geq k = i$.</u>

$P_1 - P_4$: $a = c$, <u>$n = q \cancel{\geq} i - 1$</u>

donc : $k = j \leq n$ et $k = i \geq n + 1$ <u>Absurde</u>

$\boxed{\text{Ex 2}}$ • $u_n = \sin(2\pi e n!)$

$$= \sin\left(2\pi n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right)$$

$$= \sin\left(2\pi \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}}_{\in \mathbb{N}} + 2\pi \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}\right)$$

$$= \sin\left(2\pi \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}\right) \qquad \text{(par } 2\pi\text{-périodicité de sin)}$$

• $\forall k \geq n+1, \quad \dfrac{n!}{k!} = \dfrac{1}{\prod_{j=n+1}^{k} j} \leq \dfrac{1}{(n+1)^{k-n}}$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^k} \qquad (\text{CI } k' = k-n)$$

$$= \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}.$$

$$2\pi \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0, \qquad \underline{\text{donc}} \quad \boxed{u_n \sim 2\pi \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} = v_n}$$

• $v_n = \dfrac{2\pi}{n+1} + 2\pi \displaystyle\sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{k!}$

$$d_n = \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \leq \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{k-n}} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^k}$$

$$= \frac{1}{(n+2)^2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^2}$$

$d_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

$\underline{\text{donc}}$ $v_n \sim \dfrac{2\pi}{n+1}$

$\boxed{u_n \sim \dfrac{2\pi}{n+1} \text{ donc } \sum u_n \text{ diverge}}$

$\boxed{22}$ ① $a^3 - b^3 = 14$. $a \times b = 1$ $\boxed{Ex 1}$

26

② $a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right)$ (à montrer par télescopage)

③ $a-b = \dfrac{a^3-b^3}{a^2+b^2+ab}$ $a+b = \dfrac{a^3+b^3}{a^2+b^2-ab}$

$= \dfrac{14}{(a-b)^2+3ab}$ $= \dfrac{a^3+b^3}{(a+b)^2-3ab}$

$= \dfrac{14}{(a-b)^2+3}$ $= \dfrac{10\sqrt{2}}{(a+b)^2-3}$

$a-b$ est solution de $x(x^2+3)=14$ $a+b$ est solution de $y(y^2-3)=10\sqrt{2}$

$f(x) = x^3+3x-14 = 0$ $y^3-3y-10\sqrt{2}=0$

f est C^0 et st $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$, donc réalise 1 bij. de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
f a un unique zéro dans $\mathbb{R}$, qui est 2

$\boxed{a-b=2}$

---

④ • Posons $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $rg\, B = 1$, dim $Ker\, B = 2$.

$\chi_B = X^2(X - tr B) = X^3$ $Sp(B) = \{0\}$, $Ker\, B = vect(\underbrace{E_1 - E_3}, 2E_1 + E_2)$

$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $U_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Posons $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_1 = BU_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Ker\, B$

$U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in Ker\, B$.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$ $(U_3 \notin Ker\, P = vect(U_1, U_2))$

$P^{-1}BP = E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T$

• Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $A^3 = B \Leftrightarrow (\underbrace{P^{-1}AP}_{A'})^3 = T$

- Recherche de CN :

Supposons $A'^3 = T = E_{1,3}$. $A' \neq 0$ et $A' \notin Gl_3(\mathbb{R})$. $rg A \in \{1;2\}$

$Im A'^3 = vect(E_1) \subset Im A'^2 \subset Im A'$ | $Ker A' \subset Ker A'^2 \subset Ker A'^3 = vect(E_1, E_2)$

$1 = rg A'^3 \leqslant rg A'^2 \leqslant rg A'$

□ 1er cas : $rg A' = 1$.

$Im A' = Im A'^2 = Im A'^3 = vect(E_1)$

$A' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A'^3 = \begin{pmatrix} a^3 & a^2 b & a^2 c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq E_{1,3}$ Impossible

□ 2ème cas : $rg A' = 2$.

$A' E_{1,3} = E_{1,3} A'$ donc $Ker E_{1,3} = vect(E_1, E_2)$ est stable par A'

$Im E_{1,3} = vect(E_1)$

$A' = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{B'} & a \\ & & b \\ \hline 0 & 0 & C \end{array}\right)$ $C^3 = 0$ donc $C = 0$. et $B' \neq 0$ (sinon $rg A \leqslant 1$)

$Ker A' = vect(\alpha E_1 + \beta E_2)$ donc $\alpha C_1 + \beta C_2 = 0$ donc $rg B' = 1$

$B'^3 = 0$ donc $Sp(B') = \{0\}$, $\chi_B = X^2$, $B'^2 = 0$, $A'^2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. $rg A'^2 \leqslant 1$

$rg A'^2 = 1$

dc $Im A'^2 = Im A'^3 = vect(E_1)$, $A'^2 = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{0} & d \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, avec $d \neq 0$

$A'^2 E_3 = d E_1$

$E_1 = A'^3 E_3 = d A' E_1$, $A' E_1 = \frac{1}{d} E_1$.

$B' = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ donc $B' = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & e & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A'^2 E_1 = \frac{1}{d^2} E_1 = 0$ Absurde

Pas de solution.

Ex 2

(*) Supposons que $Q = P + r_0$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$.

Posons $n = \deg(Q) \geq 1$

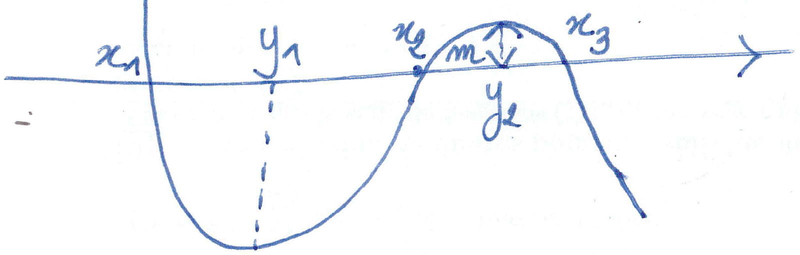
$x_1, \dots, x_n$ les zéros de Q,

$y_1, \dots, y_{n-1}$ les zéros de Q',

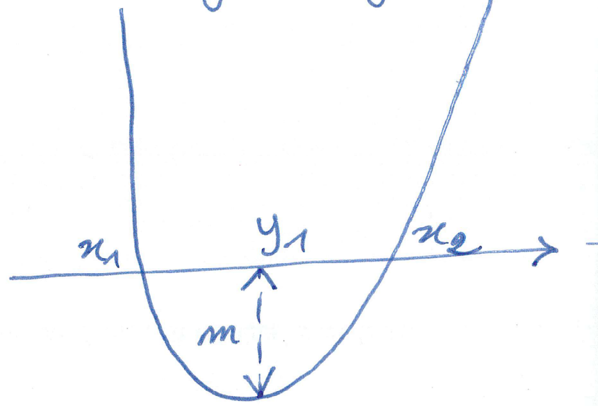
avec $x_1 < y_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < y_{n-1} < y_n$ (Rolle ...)

Supposons (quitte à remplacer Q par $-Q$) que $\lim_{-\infty} Q = +\infty$

Exemples: $\deg Q = \deg P = 3$



$\deg Q = \deg P = 2$



Posons $m = \min\limits_{0 \leq k \leq n-1} \left(|Q(y_k)| \right)$.

Signe de Q :

x		x_1		y_1		x_2	...	x_{n-1}		y_{n-1}		x_n	
Q	$+$	0	$-$			0	...		$(-1)^{n-1}$				$(-1)^n$

Sens de variation de Q : (...) $\searrow \quad \nearrow \quad \dots$

Prenons $\varepsilon \in \mathbb{R}$ et posons $Q_1 = Q + \varepsilon$.

$Q' = Q_1'$ a pour zéros $y_1, \dots, y_{n-1}$.

Posons $I = \{ r \in \mathbb{R},\ P + r$ scindé à racines simples $\}$

Si $Q \geq 0$ sur $[x_k, x_{k+1}]$:

x	x_k		y_k		x_{k+1}
$Q(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$Q \leq 0$ sur $[x_k, x_{k+1}]$

x	x_k		y_k		x_{k+1}
$Q(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	

(*) Supposons $|\varepsilon| < m$.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $Q_1(y_k)$ a même signe que $Q(y_k)$

$\lim\limits_{\pm\infty} Q_1 = \lim\limits_{\pm\infty} Q$

D'après le TVI (...), Q_1 admet n racines réelles distinctes

$x'_1, \dots x'_n$ telles que

$x'_1 < y_1 < x'_2 < \dots < x'_{n-1} < y_{n-1} < x'_n$.

Q_1 est scindé à racines simples.

$]r_0 - m, r_0 + m[\subset I$.

I est un ouvert

(*) Supposons $n \geq 3$. Il existe $k_1 \in [\![0, n-1]\!]$ tq $Q(y_k) > 0$

k'_1 ——— $Q(y_{k'_1}) < 0$.

Posons $m^+ = \min\limits_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ P(y_k) > 0}} (P(y_k))$, $m^- = \min\limits_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ P(y_k) < 0}} (|P(y_k)|)$

Si $-m^+ < \varepsilon < m^-$, alors (cf. plus haut) Q_1 est scindé à racines simples

Si $\varepsilon \geq m^-$ ou $\varepsilon \leq -m^+$:

il existe $k_0 \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $Q_1(y_{k_0}) Q(y_{k_0}) \leq 0$

Or $\lim\limits_{\pm\infty} Q_1 = \lim\limits_{\pm\infty} Q$,

donc (..) Q_1 n'est pas scindé à racines simples.

(il existe 2 intervalles successives parmi $]-\infty, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... $[x_n, +\infty[$ sur lesquels Q_1 ne change pas de signe, donc n'a pas de zéros. Il n'y a pas de zéros supplémentaire ailleurs sinon il y aurait des extrema supplémentaires).

Finalement : $\boxed{I =]-m^+, -m^-[}$

(*) Supposons $n = 2$.

Si $P(y_1) < 0$, alors (...) $I =]-\infty, -m^-[$

Si $P(y_1) > 0$, alors (...) $I =]-m^+, +\infty[$.