

Préparation à l'oral

Polycopié 3 - Questions classiques à savoir faire.

Algèbre

Applications linéaires.

1] Déterminer successivement :

1. L'ensemble des endomorphismes $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
2. En supposant E de dimension finie, l'ensemble des endomorphismes $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que, pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{N}$ tel que $f^{\lambda_x}(x) = 0$.

Théorème du rang.

2]

E est un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. u est un endomorphisme de E tel que

$$u^2 = 0$$

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où A est une matrice carrée de taille inférieure ou égale à $\frac{n}{2}$.

3] Montrer que $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ ont même rang si et seulement si

$$(\exists (P, Q) \in \mathcal{GL}_p(K) \times \mathcal{GL}_n(K), B = Q^{-1}AP)$$

On dit que A et A' sont équivalentes.

4] E, F, G sont trois espaces vectoriels de dimension finie.

On considère $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $w \in \mathcal{L}(E, G)$.

Montrer

$$\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(w) \iff \exists v \in \mathcal{L}(F, G), v \circ u = w$$

Hyperplans.

5] Soient f et g deux formes linéaires de E . Montrer

$$\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g) \iff (\exists \lambda \in K, g = \lambda f)$$

Si E est de dimension finie, montrer que l'équation d'un hyperplan dans une base (e_1, \dots, e_n) de E est de la forme $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0$ et est unique à un coefficient multiplicatif près.

Equations matricielles.

6] Résoudre $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, d'inconnue $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

(Indication : Montrer que A^3 et $E_{1,3}$ sont semblables).

7] On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Résoudre l'équation

$$(E) : M^2 = A$$

d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Applications linéaires matricielles.

8

1. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'application f_A par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f_A(M) = Tr(AM)$.
 Démontrer que l'application : $A \mapsto f_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.
2. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ tel que :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, g(AB) = g(BA).$$

Démontrer que g est colinéaire à la trace.

9

1. On considère une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.
 Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $\phi : X \mapsto tr(AX)$.
2. On suppose $\forall X \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}), tr(AX) = 0$. Montrer $A = 0$.

10 On pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(K) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(K) \\ X & \mapsto & X^T \end{array}$$

Déterminer $tr(f)$ et $det(f)$.

11 On donne $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On pose

$$f_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(K) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(K) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$$

Déterminer $det(f_A)$.

Inversibilité.

12 On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de terme général $a_{i,j}$. Montrer que, si A n'est pas inversible, alors

$$\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| \leq \sum_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} |a_{i,j}|$$

Polynômes.

13 Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ de dimension finie stables par l'opérateur de dérivation.

14 Montrer que, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé à racines simples dans \mathbb{R} , alors P' l'est aussi.

15 Supposons

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$$

avec

$$A \in \mathcal{M}_{r,s}(K)$$

Montrer

$$rg(M) = rg(A) + rg(D)$$

16 On considère $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq n} \in K^n$ distincts deux à deux ($n \geq 2$) et vérifiant $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n \lambda_j^k = 0$.
 Montrer qu'il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\lambda_j = 0$.

17

On considère des réels $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq 1$.

Montrer qu'il existe des réels $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 P(t)dt = \sum_{k=0}^n \alpha_k P(x_k)$$

Matrices nilpotentes.

18

1. Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & & \dots \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ \dots & & & \dots & 1 & 0 \\ \dots & & & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si et seulement si

$$A^n = 0 \quad \text{et} \quad A^{n-1} \neq 0$$

(A est nilpotente d'indice n).

2. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est nilpotente d'indice p . Montrer $p \leq n$. Montrer que A est semblable à une matrice dont les p premières colonnes sont données par

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & & \dots \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ \dots & & & \dots & 1 & 0 \\ \dots & & & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

3. On note (e_1, \dots, e_n) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
 On suppose qu'il existe une matrice carrée M telle que $M^2 = B$. Montrer que $\text{vect}(e_1)$ et $\text{vect}(e_1, e_2)$ sont stables par M .
 En déduire qu'il n'existe pas de matrice M telle que $M^2 = B$.
4. On définit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ par $f : P \mapsto P'$.
 Montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ tel que $g^2 = f$.

Commutants.

19 On suppose que E est de dimension finie. Déterminer successivement :

1. Le commutant de $\mathcal{L}(E)$ (ensemble des $f \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec tous les éléments de $\mathcal{L}(E)$).
2. Le commutant de $\mathcal{GL}(E)$ (ensemble des $f \in \mathcal{GL}(E)$ qui commute avec tous les éléments de $\mathcal{GL}(E)$).
3. Le commutant d'un endomorphisme nilpotent d'indice $n = \dim(E)$.

20 u est un endomorphisme d'un K -espace vectoriel E de dimension finie n non nulle.
 On appelle commutant de u le sous-espace vectoriel de E défini par

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E), v \circ u = u \circ v\}$$

Déterminer la dimension du commutant de u dans les cas suivants :

1. Le polynôme caractéristique de u est scindé à racines simples.
2. u est diagonalisable (on utilisera $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u et $\omega_1, \dots, \omega_p$ leurs ordres respectifs).

Déterminant.

21 On considère

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b & \dots & b \\ c & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & c & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

pour $(a_1, \dots, a_n, b, c) \in \mathbb{R}^{n+2}$.

1. Montrer que $f : x \mapsto \det(A + xJ)$ est une fonction affine de x (où J est une matrice de 1).

2. En déduire $\det(A)$ pour $c \neq b$ puis pour $c = b$.

On utilisera $P(X) = \prod_{k=1}^n (a_k - X)$.

22 (version 2 du déterminant précédent)

a, b et c sont trois réels et $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $D(a, b, c)$ le déterminant d'ordre n avec c sur la diagonale, a partout en dessous et b partout au dessus.

1. Calculer $D(a, a, c)$ en fonction de a, c et n .

2. Soit $\phi : x \mapsto D(a + x, b + x, c + x)$. Montrer que ϕ est affine.

3. En déduire $D(a, b, c)$ en fonction de a, b et c .

23 On donne $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

Montrer que, si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Calculs de réduction, sous-espaces stables.

24

Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet

une droite ou un plan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ stable.

25 Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est trigonalisable et donner sa trigonalisation.

26 On considère la matrice A de taille 3×3 suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n .

27 On considère $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et on pose $B_\lambda = \begin{pmatrix} -1 & \lambda & -\lambda \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les sous-espaces stables par B_λ .

2. Calculer B_λ^2 et B_λ^{-1} .

Réduction.

28 On considère E un espace vectoriel euclidien, $f : E \rightarrow E$ anti-symétrique, c'est-à-dire qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$$

1. Montrer que f est linéaire. Que dire de la matrice de f dans une base orthonormée de E ?
2. Montrer que l'ensemble des applications antisymétriques de E dans E est un espace vectoriel, et déterminer sa dimension.
3. Déterminer les applications antisymétriques de E dans E diagonalisables.
4. On considère f antisymétrique de E dans E et on pose $s = f \circ f$. Montrer que les valeurs propres de s sont négatives ou nulles, puis que s est diagonalisable.
5. Montrer que s et f ont même noyau.
6. En déduire que f est diagonalisable dans \mathbb{C} .

29 On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$, et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé.

1. Montrer que n est pair.
2. Montrer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs de taille 2.
3. Montrer qu'il n'existe aucun hyperplan stable par f .

30 A est une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$ de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $(U, V) \in \mathcal{M}_{n,1}(K)^2$ tels que $A = UV^T$.
2. Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $A^2 = \lambda A$.
3. Déterminer le polynôme caractéristique de A .
4. Donner une CNS sur $tr(A)$ pour que A soit diagonalisable.
5. Le résultat reste-il valable pour toute matrice A qui vérifie $A^2 = \lambda A$, avec $\lambda \in K$?

31 On considère $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

1. On suppose $K = \mathbb{C}$. Montrer

$$A \text{ nilpotente} \iff \chi_A = X^n \iff Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$$

2. On suppose $K = \mathbb{R}$. Parmi les implications de la question précédente, lesquelles restent vraies ?

32 On considère $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

1. Montrer que, si $\lambda \in Sp(A)$, alors, pour $k \in \mathbb{N}$, $\lambda^k \in Sp(A^k)$.
2. Montrer que, si A est diagonalisable, alors, pour $k \in \mathbb{N}$, A^k est diagonalisable. La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que, si A est trigonalisable, alors, pour $k \in \mathbb{N}$, A^k est trigonalisable. La réciproque est-elle vraie ?
4. On considère $\lambda \in K$ telle que $\lambda^2 \in Sp(A^2)$. Montrer que λ ou $-\lambda$ est valeur propre de A .
5. On suppose que A^2 admet n valeurs propres distinctes dans K . Montrer que A est diagonalisable.
6. On suppose que $K = \mathbb{C}$, A^2 est diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $Ker(A^2) = Ker(A)$.
7. Donner un exemple pour lequel A est non inversible, non diagonalisable, et A^2 est diagonalisable.
8. Donner un exemple pour lequel A est inversible, non diagonalisable, et A^2 est diagonalisable.

33 On pose $A = \begin{pmatrix} a & \dots & a & b \\ \vdots & & b & a \\ a & & & \vdots \\ b & a & \dots & a \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable, déterminer les valeurs propres

de A et de A^2 .

34 On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_n \\ 0 & \dots & \dots & a_{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Donner une CNS sur (a_1, \dots, a_n) pour que A soit

diagonalisable

35 f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On note \tilde{f} l'endomorphisme induit par f sur $Im(f)$.

Donner le lien entre le spectre de f et le spectre de \tilde{f} , les sous-espaces propres de f et ceux de \tilde{f} .

36 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & & 1 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \\ 1 & \dots & & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver le rang de A , une base de $Im(A)$ et une base de $Ker(A)$.
2. Que peut-on dire du spectre de A ?
3. Trouver un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à 3.
On pourra poser λ une valeur propre de A .

37 f et g sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. On suppose que $f \circ g = g \circ f$ et $K = \mathbb{C}$.
 Montrer que f et g ont un vecteur propre commun.
2. On suppose que $f \circ g = 0$ et $K = \mathbb{C}$.
 Montrer que f et g ont un vecteur propre commun.

38 f et g sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. On suppose que f et g sont diagonalisables. Montrer que les 3 propositions suivantes sont équivalentes :
 - $f \circ g = g \circ f$.
 - les sous-espaces propres de f sont stables par g .
 - f et g sont codiagonalisables (diagonalisables dans une même base).
2. On suppose que $f \circ g = g \circ f$ et que f et g sont trigonalisables. Montrer qu'ils sont cotrigonalisables (trigonalisables dans une même base).

39 On pose $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, avec $(A, B) \in \mathcal{M}_n(K) \times \mathcal{M}_p(K)$.

Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A et B sont diagonalisables.

40 On considère $A \in \mathcal{GL}_n(K)$ et $B \in \mathcal{M}_n(K)$.

Montrer AB diagonalisable $\iff BA$ diagonalisable.

41 On considère l'endomorphisme du \mathbb{R} espace vectoriel E des fractions rationnelles à coefficients réels :

$$\phi : P \mapsto X^n P \left(\frac{1}{X} \right)$$

1. Montrer que ϕ induit un endomorphisme ϕ_n de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer un polynôme annulateur de ϕ_n de degré 2.
3. Déterminer les éléments propres de ϕ_n et montrer que ϕ_n est diagonalisable.

Elements propres.

42 On considère $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Montrer

$$Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset \iff \chi_A(B) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$$

43 Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient : $\forall P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), PA \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

44 On considère $(A, B) \in \mathcal{M}_n(K)^2$. Montrer $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

45 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence :

$$(\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, Tr(A^k) = 0) \iff A \text{ est nilpotente.}$$

46 Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, tr(A^k) = tr(B^k)$$

Montrer que A et B ont même polynôme caractéristique.

47 On considère deux endomorphismes f et g d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que

$$f \circ g - g \circ f = \lambda f$$

avec $\lambda \in K$.

1. Calculer $f^k \circ g - g \circ f^k$ pour tout entier naturel k .
2. Démontrer que l'endomorphisme f est nilpotent.
3. Le résultat précédent est-il vrai si E est de dimension infinie ?

Normes.

48 On pose

$$E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, \pi]), f(0) = f'(\pi) = 0\}$$

Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \|f + f''\|_\infty$, avec $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, \pi]} |f(x)|$.

1. Montrer que N est une norme sur E .
2. Pour $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + y = g \\ y(0) = y'(\pi) = 0 \end{cases}$ admet pour unique solution sur \mathbb{R} $f : x \mapsto \int_0^x \sin(x-t)g(t)dt$.
3. Pour $f \in E$, on pose $N'(f) = \|f\|_\infty + \|f''\|_\infty$.
Montrer que N' est une norme sur E et que N et N' sont équivalentes.

49 On pose $E = L^1(\mathbb{N}, K) = \{u \in K^\mathbb{N}, \sum |u_n| < +\infty\}$ (ensemble des suites d'éléments de K sommables).

Pour $u \in E$, on pose

$$N_1(u) = \sum_{k=0}^{\infty} |u_n| \quad ; \quad N_\infty(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \quad ; \quad N_2(u) = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |u_n|^2}$$

1. Montrer que N_1, N_∞ et N_2 sont définies sur E et sont des normes sur E .
2. Etudier les relations de comparaison existantes entre les normes N_1, N_∞ et N_2 . Sont-elles équivalentes deux à deux ?

50 On pose $E = \mathcal{C}([a, b], K)$.

1. Montrer que les applications suivantes définies sur E sont des normes :

(a) $N_\infty : f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ (**norme de la convergence uniforme**)

(b) $N_1 : f \mapsto \|f\|_1 = \int_a^b |f|$ (**norme de la convergence en moyenne**)

(c) $E = \mathcal{C}([a, b], K)$. $N_2 : f \mapsto \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2}$ (**norme de la convergence en moyenne quadratique**)

2. Donner les relations de domination entre les normes N_∞ , N_1 et N_2 , et montrer que deux quelconques de ces normes ne sont pas équivalentes.

51 On considère $(E, \| \cdot \|)$ un K -espace vectoriel de dimension finie et $f : E \rightarrow E$.

1. On considère une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^\mathbb{N}$.

Montrer que, si $\sum \|y_n\|$ converge (on dit que la série $\sum y_n$ est absolument convergente), alors $\sum y_n$ converge.

2. On suppose que f est contractante, c'est-à-dire lipschitzienne de rapport $k \in [0, 1[$.

On considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in E$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$$

(a) Montrer que la série $\sum x_{n+1} - x_n$ converge.

(b) Montrer que f admet un unique point fixe.

3. On suppose que f^p est contractante.

Montrer que f admet un unique point fixe.

52 On considère une suite (P_n) de polynômes de $\mathbb{R}_p[X]$ qui converge simplement vers P .

Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment et que $P \in \mathbb{R}_p[X]$.

53 On considère $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

1. Montrer que A est semblable à une suite de matrices triangulaires supérieures dont les coefficients en-dehors de la diagonale tendent vers 0.

2. Montrer l'équivalence entre les 3 propositions suivantes :

(a) Les valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à 1.

(b) $A^n \rightarrow 0$

(c) $\sum A^n$ converge.

Continuité.

54 A est une partie non vide convexe de E . On suppose que $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur A . Montrer que f vérifie le théorème des valeurs intermédiaires sur A .

55 On considère $(A, B) \in \mathcal{M}_n(K)^2$. La comatrice de A est la matrice des cofacteurs de A :

$$\text{com}(A) = ((-1)^{i+j} \Delta_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

1. Montrer que l'application $A \mapsto A^{-1}$ est continue sur $\mathcal{GL}_n(K)$.

2. Déterminer $\text{rg}(\text{com}(A))$.

56 Montrer que l'application $f : A \mapsto \chi_A$ est continue sur $\mathcal{M}_n(K)$.

Topologie.

57

1. Montrer que l'ensemble F des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $\mathcal{GL}_n(K)$ est dense dans $\mathcal{M}_n(K)$.

58

1. On pose $E = L^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum |u_n| < +\infty\}$ (ensemble des suites d'éléments de \mathbb{R} sommables), muni de la norme $\|\cdot\|_1$:

$$\|u\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |u_n|$$

- (a) Montrer que $A = \{u \in E, \sum_{k=0}^{\infty} u_n = 1\}$ est un fermé de E .
 - (b) Montrer que l'ensemble B des suites réelles nulles à partir d'un certain rang est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
2. On pose E' l'ensemble des suites réelles bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty} : \|u\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$
 - (a) Montrer que l'ensemble C des suites croissantes est fermé.
 - (b) Montrer que l'ensemble D des suites convergeant vers 0 est fermé.
 - (c) Montrer que l'ensemble B des suites réelles nulles à partir d'un certain rang n'est pas dense dans $(E, \|\cdot\|_{\infty})$.
 - (d) Montrer que l'ensemble $E = L^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum |u_n| < +\infty\}$ (ensemble des suites d'éléments de \mathbb{R} sommables) n'est pas fermé.

59 On suppose que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que l'ensemble P des projecteurs orthogonaux de E est fermé dans $\mathcal{L}(E)$.

60 Les ensembles suivants sont-ils fermés ? ouverts ? bornés ? denses ? dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \quad \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \quad , \quad \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

Quel est le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$?

61

1. Montrer que les seuls ouverts et fermés de E sont \emptyset et E .
2. Montrer qu'un sous-espace vectoriel de dimension finie de E est fermé.
3. Montrer qu'un hyperplan de E est, ou bien fermé, ou bien dense dans E .

62 On suppose que F est un fermé non vide de E et on considère $x \in E$.

1. On suppose dans cette question seulement que E est de dimension finie. Montrer que $d(x, F)$ est atteinte en un élément de F .
2. Montrer que $d(x, F) = 0 \iff x \in F$.

Algèbre bilinéaire.

63 On suppose que p un projecteur de E .
 Montrer que les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) p est un projecteur orthogonal.
- b) p vérifie l'inégalité de Bessel : $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$
- c) $\forall x \in E, \langle p(x), x \rangle \geq 0$
- d) p est auto-adjoint.

64 On suppose que E est un espace euclidien et u un endomorphisme de E .

1. Montrer que u est un projecteur de E si et seulement si u est diagonalisable et $Sp(u) \subset \{0; 1\}$.
2. Montrer que u est un projecteur orthogonal si et seulement si u est diagonalisable en base orthonormée et $Sp(u) \subset \{0; 1\}$.
3. Montrer que u est une symétrie si et seulement si u est diagonalisable et $Sp(u) \subset \{-1; 1\}$.
4. Montrer que u est une symétrie orthogonale si et seulement si u est diagonalisable en base orthonormée et $Sp(u) \subset \{-1; 1\}$.

65 On pose $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On pose

$$\phi: \begin{array}{ccc} E^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (A, B) & \mapsto & tr(A^T B) \end{array}$$

1. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E .
2. Montrer

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), tr(A) \leq \sqrt{n} \|A\|$$

3. Montrer

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

4. On considère une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N(AB) \leq \alpha N(A) \times N(B)$$

5. Existe-il une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N(AB) = N(A) \times N(B)$$

6. Existe-il une norme N sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est invariante par similitude ?

66 Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.
 Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de trace n .

67

1. Quels sont les projecteurs de E qui sont des isométries ?
2. Quelles sont les projecteurs de E qui sont des endomorphismes auto-adjoints ?
3. Quelles sont les symétries de E qui sont des isométries ?
4. Quelles sont les symétries de E qui sont des endomorphismes auto-adjoints ?
5. Montrer que les isométries diagonalisables sont les symétries orthogonales de E .
6. Montrer que, si une isométrie est trigonalisable en base orthonormée, alors elle est diagonalisable.

68 On considère $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = QR$.

69 - Réduction des isométries.

On considère $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\text{Ker}(A - In)$ et $\text{Ker}(A + In)$ sont orthogonaux.
2. On suppose qu'il n'existe aucune droite vectorielle stable par A .
 Montrer qu'il existe un plan stable par A .
 Montrer que l'endomorphisme induit par A sur ce plan stable est une rotation.

3. Montrer :

$$\exists P \in \mathcal{O}(n), P^{-1}AP = \text{diag}(I_p, -I_q, \Omega_1, \dots, \Omega_r)$$

avec, pour $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\Omega_k \in SO(2)$,

en convenant que le bloc I_p , le bloc $-I_q$, les blocs $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ peuvent ne pas être présents.

A est semblable, via une matrice de passage orthogonale, à une matrice diagonale par blocs, dont chacun des blocs diagonaux est, ou bien une matrice identité, ou bien une matrice diagonale de -1, ou bien une matrice de rotation d'ordre 2.

4. On considère λ une valeur propre complexe non réelle de A .
 On considère un vecteur propre Z associé à la valeur propre λ . On pose $X = \text{Re}(Z)$ et $Y = \text{Im}(Z)$.
 Montrer que X et Y sont orthogonaux et de même norme.

70 u est un endomorphisme auto-adjoint de E , de dimension $n \geq 1$.

1. Montrer qu'il existe $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall x \in E, k_1 \|x\|^2 \leq \langle u(x), x \rangle \leq k_2 \|x\|^2$$

2. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leq k \|x\|$$

3. On pose

$$S = \{x \in E, \|x\| = 1\}$$

Déterminer

$$\min_{x \in S} \langle u(x), x \rangle$$

$$\max_{x \in S} \langle u(x), x \rangle$$

$$\max_{x \in S} \|u(x)\|$$

4. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de u rangées dans l'ordre croissant.
 On considère $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et on pose \mathcal{V}_p l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension p .
 Montrer

$$\lambda_p = \min_{V \in \mathcal{V}_p} \max_{x \in S \cap V} \langle u(x), x \rangle$$

71

1. On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose $M = A^T A$.

(a) Montrer que M est symétrique positive, et que M est définie positive si et seulement si A est inversible.

(b) Montrer $\text{rg}(A) = \text{rg}(M)$.

(c) Montrer que $A^T A$ et AA^T sont "orthogonalement" semblables.

(d) On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de $A^T A$. Montrer : $\sum_{k=1}^n \lambda_k = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2$.

2. On considère $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = A^T A$.

Analyse

Séries.

72 On pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

73

1. Montrer que, si $\sum u_{2n}$ et $\sum u_{2n+1}$ convergent, alors $\sum u_n$ converge. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum u_{2n} + u_{2n+1}$ converge.

74 **Séries de Bertrand.**

On considère $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln(n))^b n^a}$ converge.

75 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ donné et, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$$

avec $0 < a < b$. Etudier la nature de la série $\sum u_n$.

76 On considère une suite (a_n) décroissante et convergeant vers 0, et x un réel. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = a_n \sin(nx)$.
 Etudier la nature de la série $\sum u_n$ (selon les propriétés de (a_n)).

77 Déterminer la nature de la série $\sum \frac{n^{2\alpha}}{\alpha^n + \ln(n)}$.

78 On considère deux séries à termes positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

1. On suppose

$$u_n = O(v_n)$$

- (a) Montrer que, si $\sum v_n$ converge, alors

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right)$$

- (b) Montrer que, si $\sum v_n$ diverge, alors

$$\sum_{k=0}^n u_k = O\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$$

2. Montrer que les résultats de la question précédente restent vrais si on remplace O par o ou par \sim .

Trigonométrie.

79 Pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin(kx)$, et $T_0(x) = 0$.

Montrer que $|T_n(x)| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$.

80 On considère E l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} muni du produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Montrer que les fonctions $(f_k : x \mapsto \cos(2\pi kx))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(g_k : x \mapsto \sin(2\pi kx))_{k \in \mathbb{N}^*}$, forment une famille orthogonale.

Séries entières.

81 On pose $a_n = \binom{2n}{n}$. Déterminer l'ensemble de convergence et l'expression de la somme de la série entière $\sum a_n x^n$.

82 Donner l'ensemble maximal sur lequel les fonctions suivantes sont développables en séries entières :

$$x \mapsto \ln(1-x) \quad ; \quad x \mapsto (1+x)^\alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

83 On considère deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence R_a et R_b distincts. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ est $\min(R_a, R_b)$

84 Pour $p \in \mathbb{N}$, exprimer sans signe somme $x \mapsto \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n$ sur $] -1, 1[$.

85 Exprimer sans signe somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$ sur $] -1, 1[$.

86 Pour $p \in \mathbb{N}$, développer en série entière $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^{p+1}}$.

87 Développer en série entière $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

88 - Comportement de la somme aux bornes de l'intervalle de convergence.

On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence 1 et de somme S .

1. On suppose que $\sum a_n$ est absolument convergente. Montrer que S est définie et continue sur $[-1, 1]$.
2. On suppose que (a_n) est une suite de réels positifs et que $\sum a_n$ est divergente. Montrer que S tend vers $+\infty$ en 1^- .
3. *Approfondissement* (Théorème d'Abel radial) : On suppose que $\sum a_n$ est convergente. Montrer que S est définie et continue sur $[0, 1]$.
4. *Approfondissement* (Théorème d'Abel radial) : On suppose que $\sum a_n (-1)^n$ est convergente. Montrer que S est définie et continue sur $[-1, 0]$.
5. Ces résultats se généralisent-ils au cas où le rayon de la série entière est $R > 0$?

89 On considère une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon $R = 1$ et telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0$

On pose $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, qui est \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$.

1. Montrer que S admet une limite finie en 1^- si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, et que, dans ce cas, S est \mathcal{C}^0 sur $[-1, 1]$. Donner de plus, dans ce cas, l'expression de $S(1)$.
2. Montrer que S est dérivable en 1^- si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n$ converge, et que, dans ce cas, S est \mathcal{C}^1 sur $[-1, 1]$. Donner de plus, dans ce cas, l'expression de $S'(1)$.
3. *Approfondissement* Montrer que, pour $p \in \mathbb{N}^*$:
 Si $\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) a_n$ converge, alors S est \mathcal{C}^p sur $[-1, 1]$. Donner de plus, dans ce cas, l'expression de $S^{(p)}(1)$.
4. *Approfondissement* Montrer que, pour $p \in \mathbb{N}^*$:
 Si S est p fois dérivable en 1^- , alors $\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) a_n$ converge, et que, dans ce cas, S est \mathcal{C}^p sur $[-1, 1]$. Donner de plus, dans ce cas, l'expression de $S^{(p)}(1)$.
5. *Approfondissement* Montrer que, pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a dans tous les cas :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} S^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) a_n$$

Intégration.

90 On considère $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

1. Le fait que f' tend vers 0 en $+\infty$ implique-t-il que f admet une limite finie en $+\infty$?
2. Le fait que f tend vers 0 en $+\infty$ implique-t-il que f' tend vers 0 en $+\infty$?
3. On suppose que f et f' tendent vers des réels a et b en $+\infty$. Montrer que $b = 0$.
4. On suppose que $f + f'$ tend vers un réel a en $+\infty$. Montrer que f et f' ont des limites finies en $+\infty$

91 On considère $f \in \mathcal{C}^1$ sur \mathbb{R}_+ telle que f et f' sont intégrables sur \mathbb{R}_+ . Montrer que f admet pour limite 0 en $+\infty$.

92

1. Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vraie pour les fonctions continues par morceaux sur un segment, puis pour les fonctions continues par morceaux sur un intervalle, pourvu que les intégrales écrites soient convergentes.
2. On suppose que f et g sont continues par morceaux et de carré intégrable sur un intervalle I . Montrer que fg est intégrable sur I .
3. On considère $f \in \mathcal{C}^1$ sur \mathbb{R}_+ à valeurs réelles telle que f^2 et f'^2 sont intégrables sur \mathbb{R}_+ . Montrer que f admet pour limite 0 en $+\infty$.

Fonctions Gamma, Dzêta.

93 On pose Γ la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

1. Montrer que Γ est bien définie sur \mathbb{R}_+^* .
2. Montrer que Γ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* et donner l'expression de ses dérivées successives.
3. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
4. Etudier la convexité de Γ .
5. Montrer que Γ' admet un unique zéro sur \mathbb{R}_+^* , qui est dans $]1, 2[$.
6. Donner la limite de Γ en $+\infty$ et un équivalent de Γ en 0^+ .
7. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(x)}{x}$. Donner l'allure à main levée du graphe de Gamma.

Intégrales de Dirichlet. **94** On considère $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature des intégrales suivantes (convergence, convergence absolue) :

$$\int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{\sin(t)}{t^\alpha} \right) dt \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$$

95 Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt$$

En utilisant la fonction g , calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

Suites et séries de fonctions.

96 On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$$

On note sa somme la fonction ζ (zêta) de Riemann.

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur \mathbb{R} , puis la convergence uniforme sur \mathbb{R}_+ , sur $]0, a[$ et sur $[a, +\infty[$.
2. Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ sur \mathbb{R} , puis la convergence normale sur $]1, +\infty[$, sur $]1, a[$ et sur $[a, +\infty[$.
3. Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $]1, a[$ et sur $[a, +\infty[$.
4. Montrer que $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est \mathcal{C}^∞ sur $]1, +\infty[$.
5. Etudier la limite de ζ en $+\infty$.
6. Etudier la limite de ζ en 1.

Equations différentielles.

97 On considère l'équation différentielle $(E) : t^2 y'' - 2ty' + 2y = 2(1 + t \sin(t))$, on note (H) l'équation différentielle homogène associée.

1. Déterminer les solutions DSE de (E) .
2. Résoudre (E) en effectuant le changement de variable $t = e^u$.

98 On considère l'équation $(E) : xy'' + xy' - y = 0$ sur \mathbb{R}_+^* .

1. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $x \mapsto x^\alpha$ est solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* .
2. On pose $G : x \mapsto \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^2} dt$.
Déterminer les variations de G sur \mathbb{R}_+^* et ses limites en $+\infty$ et en 0^+ .
3. Résoudre (E) sur \mathbb{R}_+^* en utilisant le changement de variable $y = xz$.
4. Déterminer les limites des solutions de (E) en $+\infty$ et en 0^+ .

Calcul différentiel.

99 On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose $f_A : t \mapsto \det_n((I_n + tA))$.

Montrer que f_A est dérivable en 0 et calculer $f'_A(0)$ par deux méthodes différentes :

1. en écrivant que f_A est la composée d'une fonction vectorielle par \det_n .
2. en trigonalisant A .

Convexité.

100 - **Inégalité de Jensen.** f est une fonction convexe de I dans \mathbb{R} .

Montrer que, pour $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$,

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

Probabilités

101 - Continuité croissante.

Dans un espace probabilisé, (A_n) est une suite d'événements indépendants mutuellement. On pose

$$A = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq p} A_k$$

1. On suppose que $\sum P(A_n)$ converge. Montrer que $P(A) = 0$.
2. On suppose que $\sum P(A_n)$ diverge. Montrer que $P(A) = 1$.
 (loi de Kolmogorov - du 0/1)

102

p, n et q sont des entiers naturels.

1. Par un télescopage, montrer

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

2. Par un dénombrement ou en utilisant le développement d'un polynôme, montrer (formule de Vandermonde) :

$$\sum_{k=0}^p \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{p-k} = \binom{n_1+n_2}{p} \quad ; \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

103 - Somme de lois binomiales.

1. X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (n_1, p) et (n_2, p) .
 Montrer que $Z = X_1 + X_2$ suit une loi binomiale de paramètres $(n_1 + n_2, p)$.
2. $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant des lois de Bernoulli de même paramètre $p \in]0, 1[$.
 Montrer que $X = \sum_{k=1}^n X_k$ suit une loi binomiale de paramètres n et p .

104 On répète le lancer d'une pièce, la probabilité d'obtenir PILE à chaque lancer étant de p , et les lancers étant indépendants.

1. On gagne lorsqu'on obtient pour la deuxième fois PILE. Donner la probabilité de gagner exactement au lancer n .
 Donner la probabilité de ne jamais gagner.
2. On gagne lorsqu'on obtient deux fois de suite le même résultat. Donner la probabilité de gagner exactement au lancer n .
3. On gagne lorsqu'on obtient pour la première fois une séquence de 2 tirages consécutifs PILE-FACE dans cet ordre.
4. On gagne lorsqu'on obtient pour la première fois deux PILE successifs. Donner la probabilité de gagner exactement au lancer n .

105 On suppose $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . on effectue des tirages successifs dans l'urne sans remise. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée au tirage k . On note X la variable aléatoire égale au plus grand numéro de tirage k tel que $N_1 < \dots < N_k$.
 Déterminer l'espérance puis la loi de X .

106 X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres p et q .

1. Calculer $E(\max(X, Y))$.
2. Reconnaître la loi de $\min(X, Y)$.
3. En déduire une autre façon de calculer $E(\max(X, Y))$.

107 $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont des variables aléatoires qui admettent un moment d'ordre 2. On appelle **matrice de covariance** des variables $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ la matrice

$$M = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Montrer que M est une matrice réelle symétrique positive, c'est-à-dire que

$$\forall C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), C^T M C \geq 0$$

108 On considère $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On effectue des tirages successifs dans une urne contenant a boules rouges et b boules bleues. On pose $N = a + b$.

1. On pose Y le rang d'arrivée de la deuxième boule rouge. Déterminer la loi de Y dans les 2 cas suivants :
 - (a) On effectue le tirage avec remise.
 - (b) On effectue le tirage sans remise.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose X_n le nombre de boules rouges tirées parmi les n premiers tirages. Déterminer la loi de X_n dans les 2 cas suivants :
 - (a) On effectue le tirage avec remise.
 - (b) On effectue le tirage sans remise.

109 - **Rang du r -ème succès.**

On considère des lancers successifs indépendants d'une pièce de monnaie, qui tombe sur PILE avec probabilité $p \in]0, 1[$.

On considère $r \in \mathbb{N}^*$ et on pose X_r le rang du r -ème PILE obtenu.

1. Déterminer la loi de X_r .
2. Montrer que X_r admet une espérance finie, une variance et déterminer $E(X_r)$, $V(X_r)$.
3. Déterminer la fonction génératrice de X_r et retrouver la loi de X_r , que X_r admet une espérance finie, une variance et retrouver la valeur de $E(X_r)$, $V(X_r)$.

Dénombrement.

110 On effectue k tirages successifs sans remise dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à n .

Quelle est la probabilité d'obtenir une suite croissante de numéros ?

111 Pour n et p entiers naturels non nuls :

1. Déterminer le nombre de bijections, puis d'applications injectives, puis d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.
2. On note $\mathcal{C}_{n,p}$ l'ensemble des applications croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.
 $\mathcal{S}_{n,p}$ l'ensemble des applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.
Déterminer le cardinal de $\mathcal{C}_{n,p}$ par deux méthodes différentes, traitées de façon indépendantes :
 - (a) En faisant une disjonction de cas, selon le cardinal de l'image de l'application.
 - (b) En utilisant une bijection de $\mathcal{C}_{n,p}$ dans $\mathcal{S}_{n+p-1,p}$.

Préparation 11 (Racines d'une matrice symétrique positive.

Préparation 12 (Rayon spectral).

Préparation 13 (Plans stables, matrices anti-symétriques, jusqu'à l'Ex 2 Q5).

Préparation 23 (Déterminant de Gram, sauf Q5 et Q6).