$\boxed{40}$ $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ IID $\sim \mathcal{G}(p)$

① $\mathbb{E}(X_1 \mathbb{1}_{(X_1 \geq N+1)}) = \overset{*}{\cdots} = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}:\\ k\geq N+1}} k\mathbb{P}(X_1 \geq N+1)$

$$= \sum_{k=N+1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} = pf'(1-p)$$

en posant $f : x \mapsto \sum_{k=N+1}^{+\infty} x^k = \dfrac{x^{N+1}}{1-x}$ $(1-p \in]-1,1[$, int. ouvert de conv de la SE$)$

$$f'(x) = \frac{(N+1)x^N - Nx^{N+1}}{(1-x)^2}.$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_1\mathbb{1}_{(X_1\geq N+1)}) = \frac{1}{p}\left((N+1)(1-p)^N - N(1-p)^{N+1}\right)}$$

② Soit $\omega\in\Omega$. $\exists k\in\mathbb{N}$, $M_n(\omega) = X_k(\omega)$

1er cas : $M_n(\omega) \leq N$ Alors $M_n(\omega) \leq N + \sum_{k=1}^{n} X_k \mathbb{1}_{X_k\geq N+1}(\omega)$

2ème cas : $M_n(\omega) > N$.

Alors : $M_n(\omega) = X_{k_0}(\omega)\mathbb{1}_{(X_{k_0}\geq N+1)}(\omega) \leq N + \sum_{k=1}^{n} X_k\mathbb{1}_{X_k\geq N+1}(\omega)$

On a montré : $M_n \leq N + \sum_{k=1}^{n} X_k \mathbb{1}_{X_k\geq N+1}$

③. Soit $\alpha > 0$: Par $\nearrow$ de l'espérance : pour $N\in\mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(M_n) \leq N + n \times \frac{1}{p}\left[(N+1)(1-p)^N - N(1-p)^{N+1}\right]$$

- Disposons de $\beta\in]0,\alpha[$ et posons $N = \lfloor n^\beta \rfloor$

  $N \underset{n\to+\infty}{\sim} n^\beta$ donc $N = o(n^\alpha)$

Par somme : $\mathbb{E}(M_n) = o(n^\alpha)$