$\boxed{31}$ (✱) Supposons que (σ_n) converge (i) :

- $S_n = (n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1} = O(n)$ donc $\boxed{R \geq 1.}$
- Pour $x \in [0,1[$: (double transformation d'Abel)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (S_n - S_{n-1}) x^n + a_0$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n x^n - x \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$$

$$= (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$$

$$= (1-x) \times \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1} \right) x^n + S_0 \right]$$

$n' = n-1$

$$= (1-x) \left[\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\sigma_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\sigma_n x^{n+1} \right]$$

$$= (1-x)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\sigma_n x^n$$

$$= (1-x)^2 \times \left[\sigma \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\varepsilon_n x^n \right] \quad \left(\sigma_n = \sigma + \varepsilon_n, \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0 \right)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f(x) = \sigma + (1-x)^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\varepsilon_n x^n}_{A_n(x)}.$$

Prenons $\varepsilon > 0$: $\exists N_0, \ \forall n \geq N_0, \quad |\varepsilon_n| < \varepsilon.$

$$|A_n(x)| \leq \underbrace{\left| \sum_{n=0}^{N_0} (n+1)\varepsilon_n x^n \right|}_{A} + \varepsilon \underbrace{\sum_{n=N_0+1}^{+\infty} (n+1) x^n}_{\leq \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n = \frac{1}{(1-x)^2}}$$

$$|f(x) - \sigma| \leq A(1-x)^2 + \varepsilon$$

$\exists \alpha \in]0,1[, \ \forall x \in]\alpha, 1[, \ A(1-x)^2 < \varepsilon$

$\forall x \in]\alpha, 1[, \quad |f(x) - \sigma| < \varepsilon$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \sigma = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n$$

(*) Rq : On retrouve le theo. d'Abel radial :

$$(S_n) \text{ converge} \Longrightarrow \begin{cases} R \geq 1 \\ \lim\limits_{1^-} f = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n \end{cases}$$

(en effet : (S_n) converge $\underset{\text{Césaro}}{\Rightarrow}$ (σ_n) converge)

(*) La réciproque est fausse : Exemple 1 :

Posons $a_n = n(-1)^n$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(-x)^n = x \sum_{n=0}^{+\infty} n(-x)^{n-1} = \frac{x}{(1+x)^2} \underset{x \to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} S_{2n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{2k} + a_{2k+1} = -(n+1) \\ S_{2n} = S_{2n-1} + a_{2n} = n-1 \end{cases}$$

(S_n) diverge

(La réciproque du theo. d'Abel radial est fausse)

$$\begin{cases} \sigma_{2n} = \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} S_{2k} + S_{2k+1} = -2 \\ \sigma_{2n+1} = \sigma_{2n-1} + \frac{S_{2n}}{n+1} = -2 + \frac{n-1}{n+1} \end{cases}$$

(σ_n) diverge.

Exemple 2 :

Posons $\begin{cases} a_n = (-1)^n - (-1)^{n-1} \text{ pour } n \geq 1, \\ a_0 = 1 \end{cases}$ $S_n = (-1)^n$ $\begin{cases} \sigma_{2n} = 1/n+1 . \\ \sigma_{2n+1} = 0 \end{cases}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} x^n = \frac{2}{1+x} - 1 \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 0$$

(σ_n) converge mais (S_n) diverge.

La réciproque du theo de Cesaro est fausse