

21. • $P_1 - P_2$ change de signe en 0, Ex 1
donc $(P_1 - P_2)(x) \underset{0}{\sim} a x^{2j+1}$, avec $a > 0, j \in \mathbb{N}$.

De même: $(P_3 - P_4)(x) \underset{0}{\sim} b x^{2p+1}$, avec $b, c > 0$

$$(P_1 - P_4)(x) \underset{0}{\sim} c x^{2q+1}$$

$$(P_3 - P_1)(x) \underset{0}{\sim} d x^{2i}, \text{ avec } d, e, f > 0$$

$$(P_4 - P_2)(x) \underset{0}{\sim} e x^{2i}$$

$$(P_3 - P_2)(x) \underset{0}{\sim} f x^{2k}$$

$$\text{Ainsi: } \bullet (P_3 - P_4)(x) = dx^{2j} + o(x^{2j}) \\ = bx^{2k} + o(x^{2k}) - ax^{2m+1} + o(x^{2m+1})$$

donc $m > k = j$ et $f = d$.

De même, en majorant $P_3 - P_4$: $f = e$ et $p > k = i$.

$$P_1 - P_4: a = c, m = q \text{ ~~} i - 1~~$$

donc: $k = j \leq m$ et $k = i \geq m + 1$ Aboude

Ex 2 • $u_n = \sin(2\pi n!)$

$$= \sin\left(2\pi n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right)$$

$$= \sin\left(2\pi \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}}_{\in \mathbb{N}} + 2\pi \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}\right)$$

$$= \sin\left(2\pi \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}\right)$$

(par 2π -périodicité de \sin)

• $\forall k \geq m+1, \frac{n!}{k!} = \frac{1}{\prod_{j=m+1}^k j} \leq \frac{1}{(m+1)^{k-m}}$

$$\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{(m+1)^{k-m}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(m+1)^k} \quad (\text{CI } k'=k-m)$$

$$= \frac{1}{m+1} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{m+1}} = \frac{1}{m}$$

$$2\pi \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc $u_n \sim 2\pi \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} = v_m$

• $v_m = \frac{2\pi}{m+1} + 2\pi \sum_{k=m+2}^{+\infty} \frac{n!}{k!}$

$$d_n = \sum_{k=m+2}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \leq \sum_{k=m+2}^{+\infty} \frac{1}{(m+2)^{k-m}} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(m+2)^k}$$

$$= \frac{1}{(m+2)^2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{m+2}} = \frac{1}{(m+1)(m+2)} \sim \frac{1}{m^2}$$

$$d_n = o\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

donc $v_m \sim \frac{2\pi}{m+1}$

$u_n \sim \frac{2\pi}{m+1}$ (s.) $\sum u_n$ diverge

$$\text{Ex 1} \quad \textcircled{1} \quad a^3 - b^3 = 14, \quad a \times b = 1$$

Ex 1

$$\textcircled{2} \quad a^n - b^n = (a-b) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right) \quad (\text{\`a multiplier par hi\`erarchage})$$

$$\textcircled{3} \quad a-b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2 + ab}$$

$$= \frac{14}{(a-b)^2 + 3ab}$$

$$= \frac{14}{(a-b)^2 + 3}$$

$$a+b = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2 + ab}$$

$$= \frac{a^3 + b^3}{(a+b)^2 - 3ab}$$

$$= \frac{10\sqrt{2}}{(a+b)^2 - 3}$$

$a-b$ est solution de $x(x^2+3)=14$

$a+b$ est solution de $y(y^2-3)=10\sqrt{2}$

$$f(x) = x^3 + 3x - 14 = 0$$

$$y^3 - 3y - 10\sqrt{2} = 0$$

f est C^0 et est \uparrow sur \mathbb{R} , donc réalise 1 bij. de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ,
 f a un unique z\`ero dans \mathbb{R} , qui est 2.

$$\underline{a-b=2}$$

$$\textcircled{4} \quad \bullet \text{ Posons } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{rg } B = 1, \quad \text{donc } \text{Ker } B = \mathcal{L}.$$

$$\chi_B = X^2(X - \text{tr } B) = X^3 \quad \text{Sp}(B) = \{0\}, \quad \text{Ker } B = \text{vect} \left(\underbrace{E_1 - E_3}_{U_1}, 2E_1 + E_2 \right)$$

$$\text{Posons } U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_1 = BU_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } B$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } B.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R}) \quad (U_3 \notin \text{Ker } P = \text{vect}(U_1, U_2))$$

$$P^{-1}BP = E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$\bullet \text{ Pour } A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}): \quad A^3 = B \Leftrightarrow \underbrace{(P^{-1}AP)^3}_{A'} = T$$

• Recherche de CN:

Supposons $A^3 = T = E_{1,3}$. $A' \neq 0$ et $A' \notin GL_3(\mathbb{R})$. $\text{rg } A \in \{1, 2\}$

$$\text{Im } A^3 = \text{vect}(E_1) \subset \text{Im } A^2 \subset \text{Im } A' \quad | \quad \text{Ker } A' \subset \text{Ker } A^2 \subset \text{Ker } A^3 = \text{vect}(E_1, E_2)$$

$$1 = \text{rg } A^3 \leq \text{rg } A^2 \leq \text{rg } A'$$

□ 1er cas: $\text{rg } A' = 1$.

$$\text{Im } A' = \text{Im } A^2 = \text{Im } A^3 = \text{vect}(E_1)$$

$$A' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & a^2b & a^2c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq E_{1,3} \quad \underline{\text{Impossible}}$$

□ 2ème cas: $\text{rg } A' = 2$.

$A' E_{1,3} = E_{1,3} A'$ donc $\text{Ker } E_{1,3} = \text{vect}(E_1, E_2)$ est stable par A'

$\text{Im } E_{1,3} = \text{vect}(E_1)$
 $C = 0$ donc $C = 0$. et $B' \neq 0$ (sinon $\text{rg } A \leq 1$)

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} B' & \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \quad C = 0$$

$\text{Ker } A' = \text{vect}(\alpha E_1 + \beta E_2)$ donc $\alpha C_1 + \beta C_2 = 0$ donc $\text{rg } B' = 1$

$B'^3 = 0$ donc $\text{Sp}(B') = \{0\}$, $\chi_B = X^2$, $B'^2 = 0$, $A'^2 = \begin{pmatrix} 0 & * \\ \hline 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\text{rg } A'^2 \leq 1$
 $\text{rg } A'^2 = 1$

dc $\text{Im } A'^2 = \text{Im } A^3 = \text{vect}(E_1)$, $A'^2 = \begin{pmatrix} 0 & d \\ \hline 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $d \neq 0$

$$A'^2 E_3 = d E_1$$

$$E_1 = A'^3 E_3 = d A' E_1, \quad A' E_1 = \frac{1}{d} E_1$$

$$B' = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad B' = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & e & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A'^2 E_1 = \frac{1}{d^2} E_1 = 0 \quad \text{Absurde}$$

Pas de solution.

Ex 2

* Supposons que $Q = P + R_0$ est scindé à racines simples dans \mathbb{R} .

Posons $m = \deg(Q) \geq 1$

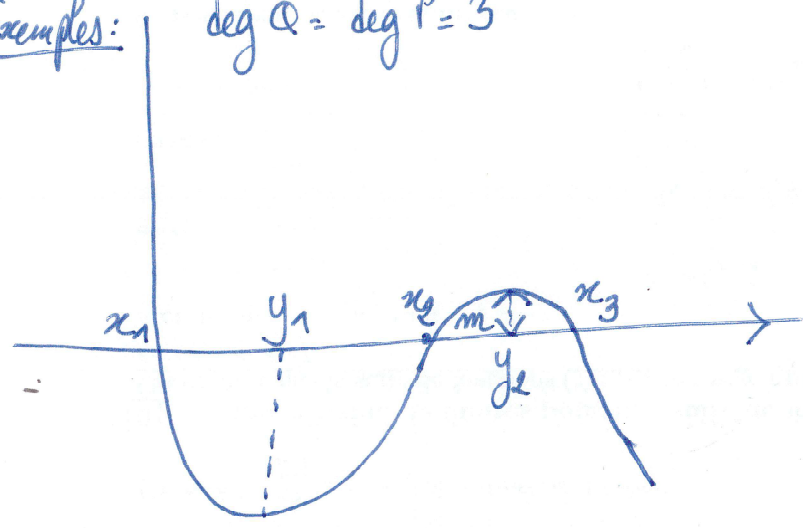
x_1, \dots, x_n les zéros de Q ,

y_1, \dots, y_{n-1} les zéros de Q' ,

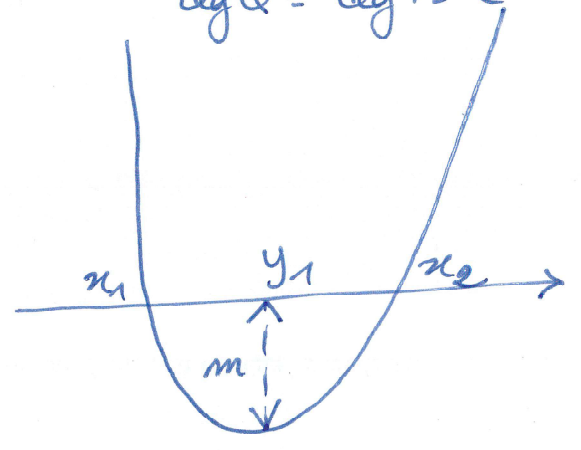
avec $x_1 < y_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$ (Rolle I...)

Supposons (quitte à remplacer Q par $-Q$) que $\lim_{x \rightarrow +\infty} Q = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} Q = -\infty$

Exemples: $\deg Q = \deg P = 3$

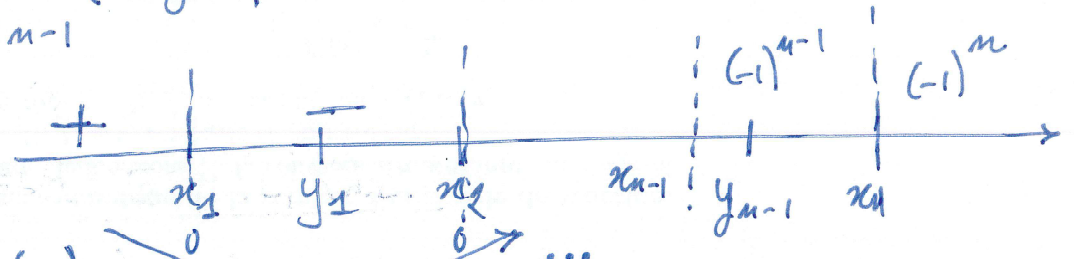


$\deg Q = \deg P = 2$



Posons $m = \min_{0 \leq k \leq m-1} (|Q(y_k)|)$

Signe de Q:



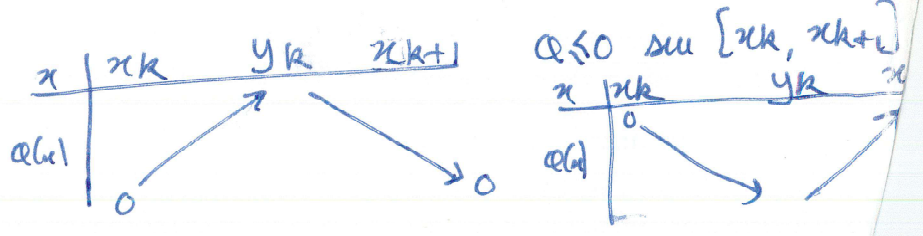
Seus de variation de Q: (-, -)

Prendons $\epsilon \in \mathbb{R}$ et posons $Q_1 = Q + \epsilon$.

$Q' = Q'_1$ a pour zéros y_1, \dots, y_{n-1} .

Posons $\mathcal{I} = \{x \in \mathbb{R}, P + x \text{ scindé à racines simples}\}$

Si $Q \geq 0$ sur $[x_k, x_{k+1}]$:



* Supposons $|\epsilon| < m$.

Pour tout $k \in [0, n-1]$, $Q_1(y_k)$ a même signe que $Q(y_k)$

$\lim_{\pm \infty} Q_1 = \lim_{\pm \infty} Q$ que Q sur \mathbb{R} .

D'après le TVI (...), Q_1 admet n racines réelles distinctes

x'_1, \dots, x'_n telles que

$x'_1 < y_1 < x'_2 < \dots < x'_{n-1} < y_{n-1} < x'_n$.

Q_1 est scindé à racines simples.

$]r_0 - m, r_0 + m[\subset \mathbb{I}$.

\mathbb{I} est un ouvert.

* Supposons $n \geq 3$.

il existe $k_1 \in [0, n-1]$ tel que $Q(y_{k_1}) > 0$
 $k'_1 \text{ ————— } Q(y_{k'_1}) < 0$.

Posons $m^+ = \min_{0 \leq k \leq n-1, P(y_k) > 0} (P(y_k))$, $m^- = \min_{0 \leq k \leq n-1, P(y_k) < 0} (|P(y_k)|)$

(Si $-m^+ < \epsilon < m^-$, (alors (cf. plus haut) Q_1 est scindé à racines simples

(Si $\epsilon > m^-$ ou $\epsilon < -m^+$:

il existe $k_0 \in [0, n-1]$ tel que $Q_1(y_{k_0}) Q(y_{k_0}) \leq 0$

On $\lim_{\pm \infty} Q_1 = \lim_{\pm \infty} Q$,

donc (...) Q_1 n'est pas scindé à racines simples.

(il existe 2 intervalles ^{successives} parmi $]-\infty, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_n, +\infty[$

sur lesquels Q_1 ne change pas de signe, donc n'a pas de zéros.

Il n'y a pas de zéros supplémentaires ailleurs sinon il y aurait des extréma supplémentaires).

Finalemment: $I =]-m^+, -m^- [$

* Supposons $n \in \mathbb{Z}$.

Si $P(y_1) < 0$, alors $(... | I =]-\infty, -m^- [$

Si $P(y_1) > 0$, alors $(... | I =]-m^+, +\infty [$

23 $f_n(u) = \frac{\sin(nu)}{n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Pour $x \in \mathbb{R}$.

$f_n(u) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$. $\alpha > 1 \Rightarrow \sum |f_n(u)|$ AC.

Supposons $x \neq 0$ [ett]
(sin on $f_n = 0$)

Posons $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \sin(kx) = \text{Im}(Z_n)$
 en posant $Z_n = \sum_{k=0}^n e^{ikx} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}$
 $= e^{\frac{inx}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}$

$|S_n| \leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} = c(x)$

Abel $\rightarrow \sum_{k=1}^m f_k(x) = \sum_{k=1}^m \frac{S_k(x) - S_{k-1}(x)}{k^\alpha}$
 $= \sum_{k=1}^m \frac{S_k(x)}{k^\alpha} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{S_k(x)}{(k+1)^\alpha}$
 $= \sum_{k=1}^{m-1} S_k(x) \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) + \frac{S_m(x)}{m^\alpha} - 1$
 $\left| S_k(x) \times \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) \right| \leq c(x) \times \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) \leq \frac{c(x)}{m^\alpha} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$

$\sum \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \in \mathbb{C}$, donc $\sum S_k(x) \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right)$ est AC,

donc $\sum f_k(x)$ converge

$\sum f_n$ CS sur \mathbb{R} .

$\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} \leq \frac{1}{n^\alpha}$
 $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = \frac{1}{n^\alpha}$

$\alpha > 1 \Rightarrow \sum f_n$ CN sur \mathbb{R} .

$\alpha > 1 \Leftrightarrow \sum f_n$ CN sur \mathbb{R}

• Supposons $0 < \alpha < 1$:

$$\sum_{k=n+1}^p f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{p-1} S_k(x) \times \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) + \frac{S_p(x)}{p^\alpha} - \frac{S_n(x)}{n^\alpha}$$

Quand $p \rightarrow +\infty$:

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} S_k(x) \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) - \frac{S_n(x)}{n^\alpha}$$

Pour $\theta \in]0, \pi[$: pour $x \in]0, \pi - \theta[$: $\sin \frac{x}{2} \geq \sin \frac{\theta}{2}$

$$|S_n(x)| \leq C(x) \leq C = \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

$$|R_n(x)| \leq C \times \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} + \frac{C}{n^\alpha} = \frac{C}{(n+1)^\alpha} + \frac{C}{n^\alpha}$$

$$\|R_n\|_{\infty}^{[0, \pi - \theta]} \leq \frac{C}{n^\alpha} + \frac{C}{(n+1)^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$\sum f_n$ CU sur $]0, \pi - \theta[$; et de même sur $[0 + j\pi, (2\pi + 1)j - \theta[$, avec $j \in \mathbb{Z}$

• Supposons que $\sum f_n$ est CN un. sur $]0, \theta[$.

Posons $x_n = \frac{\pi}{2n} \rightarrow 0$

$f_n(x_n) = \frac{1}{n^\alpha}$. donc $\sum f_n(x_n)$ diverge. Absurde.

Pas de CN sur $]0, \theta[$. De même, pas de CN sur $]j\pi, \theta + j\pi[$, avec $j \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow](2\pi + 1)j - \theta, (2\pi + 1)j[$

• (...) On trouve $x_n \rightarrow 0$
tel que $R_n(x_n) \not\rightarrow 0$
Pas de CU sur $]0, \theta[$.

ni sur $]j\pi, \theta + j\pi[$, $](2\pi + 1)j - \theta, (2\pi + 1)j[$

24) • Posons $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$
 muni du produit scalaire $f, g \mapsto \langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$

Disposons de $B = (P_0, \dots, P_m)$ une BON de $\mathbb{R}_n[X]$.

• Posons $g: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(\alpha_0 - \alpha_n) \mapsto \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^m \alpha_k P_k - \exp \right)^2 = f \left(\sum_{k=0}^m \alpha_k P_k \right)$
 $= \sum_{k=0}^m \alpha_k^2 - 2 \sum_{k=0}^m \alpha_k \langle P_k, \exp \rangle + \|\exp\|^2$

$\partial^k g(\alpha_0 - \alpha_n) = 2(\alpha_k - \langle P_k, \exp \rangle)$

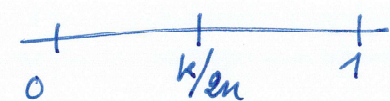
• $\nabla g(\alpha_0 - \alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \{0, \dots, m\}, \alpha_k = \langle P_k, \exp \rangle$
 $\Leftrightarrow P = \sum_{k=0}^m \langle P_k, \exp \rangle P_k$
 $= p^\perp(\exp)$
 $\mathbb{R}_n[X]$

(il minimise la distance de \exp à $\mathbb{R}_n[X]$)

25 ① $f \in C^1([0,1], \mathbb{R})$

IPP: $I_n = \int_0^1 \cos(2\pi n t) f(t) dt = \left[+ \frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi n t) f(t) \right]_0^1 - \frac{1}{2\pi n} \int_0^1 \sin(2\pi n t) f'(t) dt$

$|I_n| \leq \frac{1}{2\pi n} \int_0^1 \|f'\|_\infty = \frac{\|f'\|_\infty}{2\pi n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

② $\forall (x,y) \in [0,1]^2, |f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|, \text{ avec } \lambda > 0.$ 

$I_n = \sum_{k=0}^{2n-1} \int_{k/2n}^{(k+1)/2n} \cos(2\pi n t) f(t) dt$ $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} t' = t - \frac{k}{2n}$

$= \sum_{k=0}^{2n-1} \int_0^{1/2n} \cos(2\pi n t + \pi k) f(t + \frac{k}{2n}) dt$

$= \int_0^{1/2n} \cos(2\pi n t) \times \left[\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k f(t + \frac{k}{2n}) \right] dt$
 $\qquad \qquad \qquad \underbrace{\qquad \qquad \qquad}_{\sum_{k=0}^{n-1} f(t + \frac{2k}{2n}) - f(t + \frac{2k+1}{2n})}$

$|I_n| \leq \int_0^{1/2n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda \times \frac{1}{2n} dt = \frac{\lambda}{2} \times \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$