# Préparation à l'oral

Polycopié 4.

## I Centrale Math (30m sans préparation)

**1** **Algèbre.** Montrer
$$\exists! P \in \mathbb{R}[X]\ ,\ P(X) + P(X+1) = X$$

**2** **Algèbre.** On considère trois espaces vectoriels $E$, $F$, $G$, $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$, et on pose $w = v \circ u$.
Montrer que $w$ est un isomorphisme si et seulement si $u$ est injectif, $v$ est surjectif et $Ker(v) \oplus Im(u) = F$.

**3** **Algèbre**

1. Quel est le polynôme caractéristique d'une matrice de rang 1 ?
2. On considère $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Montrer
$$det(A + XX^T) = (1 + X^T A^{-1} X) det(A)$$

**4** **Algèbre**
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$M(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 & . & . & n \\ 1 & x & 2 & . & . & n \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 2 & . & . & x & n \\ 1 & 2 & . & . & n & x \end{pmatrix}$$

1. Montrer
$$det(M(x)) = \left(x + \frac{n(n+1)}{2}\right) \prod_{k=1}^{n} (x - i)$$
2. $M(x)$ est-elle diagonalisable ? Déterminer les valeurs propres de $M(x)$.
3. Montrer
$$\exists P \in \mathcal{GL}_{n+1}(\mathbb{R})\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ P^{-1} M(x) P \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$$

**5** **Analyse**
On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$. Montrer qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que
$$S_n = \frac{\ln^2(n)}{2} + l + o(1)$$

**6** **Analyse**

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $a_x \in \mathbb{R}$ tel que $\int_x^{a_x} e^{t^2} dt = 1$.
2. Montrer que $x \mapsto a_x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $x \mapsto a_x$ possède une symétrie par rapport à $y = -x$.

**7** **Analyse.** On pose $F : x \mapsto \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^x} dt$.

1. Montrer que $F$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)}$. Montrer que $S$ est $\mathcal{C}^\infty$ et bornée sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'ensemble de définition de $F$ est $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{8}$ **Analyse.** On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

1. Montrer que l'intégrale $I$ converge.
2. Montrer que, pour tout $x$ réel : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\cos(t)} \cos(x\sin(t))dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$.
3. En déduire la valeur de $I$.

$\boxed{9}$ **Analyse**
On définit sur $I = ]-1, +\infty[$ la fonction

$$S : x \mapsto S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$$

1. Calculer $S(1)$.
2. Montrer que $S$ est définie sur $I$.
3. Montrer que $S$ est $\mathcal{C}^1$ sur $I$.
4. Déterminer un équivalent de $S$ en $-1^+$ et en $+\infty$.

$\boxed{10}$ **Analyse**
**Exercice 1 :** Ecrire comme une série $\int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2x^2} \right)$.

**Exercice 2 :** On considère $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que :$P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\frac{e}{4}\right)^{\lambda}$.

$\boxed{11}$ **Analyse.** On considère $z = x + iy = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$. La relation $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ est-elle toujours valide ?
Montrer $\theta = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.
On pose $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x \leqslant 0\}$. Déterminer $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D$ qui vérifie

$$\forall u \in D \ , \ < u \ , \ \nabla f(u) >= \frac{1}{\|u\|}$$

$\boxed{12}$ **Analyse**
On pose

$$f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

1. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer les extrema locaux et globaux de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $f$ admet des extrema sur la boule unité fermée, et les déterminer.

$\boxed{13}$ **Analyse.** On considère l'équation $(E) : xy'' + xy' - y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Déterminer les valeurs de $\alpha$ pour lesquelles $x \mapsto x^\alpha$ est solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. On pose $G : x \mapsto \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^2} dt$.
   Déterminer les variations de $G$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et ses limites en $+\infty$ et en $0^+$.
3. Résoudre $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en utilisant le changement de variable $y = xz$.
4. Déterminer les limites des solutions de $(E)$ en $+\infty$ et en $0^+$.

**14** **Analyse**

On considère l'équation différentielle

$$(E) : t^2y''(t) - ty'(t) - 3y(t) = 5t^4$$

1. Déterminer les solutions de $(E)$ de la forme $t \mapsto t^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}_-^*$ puis sur $\mathbb{R}$.

**15** **Probabilités.**

On considère deux variables aléatoires $X$ et $Y$ IID suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $M = \begin{pmatrix} (-1)^X & 1 \\ (-1)^Y & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la probabilité que $M$ soit inversible.
2. Calculer la probabilité que $M$ soit diagonalisable dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$.

**16** **Probabilités**

Une puce se déplace sur une échelle graduée. A l'origine, elle est en 0.
Si, à l'instant $n$, elle se trouve à l'abscisse $i \in \mathbb{Z}$, elle peut aller à l'instant $n+1$ en position $i+1$ ou en position $i-1$ de façon équiprobable.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n$ la variable aléatoire égale à l'abscisse de la puce à l'instant $n$.
Montrer l'existence et effectuer le calcul de $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

**17** **Probabilités**

On considère une urne contenant 1 boule blanche et 1 boule rouge.
On effectue $n$ tirages et, à chaque tirage, on rajoute dans l'urne $p$ boules de la même couleur que la boule tirée. On pose $X_k$ la variable aléatoire qui vaut 1 si on tire du rouge, 0 si on tire du blanc au tirage $k$.

1. Donner la loi de $X_1$, de $X_2$.
2. On pose $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ pour $k \geqslant 1$.
   (a) Donner la loi de $S_2$. En déduire la loi de $X_3$.
   (b) Déterminer la loi de $X_k$ pour $k \geqslant 1$.

# II Mines-ponts (1h, avec 15m de préparation)

## 18 Analyse, Algèbre.

**Exercice 1 :** On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} (x^2 + y^2)^x \ \texttt{si} \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 \ \texttt{sinon} \end{cases}$.

1. Résoudre $f(x, y) = 1$.
2. Montrer que $f$ n'a pas d'extremum en 0.
3. Déterminer les points critiques de $f$.
4. Montrer que $f$ admet un unique maximum et un unique minimum sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 2 :** On donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre $X + X^T = tr(X)A$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

## 19 Algèbre, Analyse.

**Exercice 1 :** On considère un entier naturel $d \geqslant 2$. Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^2$, on pose $[A, B] = AB - BA$.
On pose $H_d(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \ , \ tr(M) = 0\}$.
On considère $\gamma \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_d(\mathbb{R}))$ telle que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^2 \ , \ \gamma([A, B]) = [\gamma(A), B]$

1. Montrer que $\mathcal{M}_d(\mathbb{R}) = H_d(\mathbb{R}) \oplus vect(I_d)$.
2. Montrer que, pour $X \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ : $X \in vect(I_d) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \ , \ \gamma(X) = \lambda X$.
3. Montrer que, pour $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ : $A \in \mathcal{D}_d(\mathbb{R}) \Rightarrow \gamma(A) \in \mathcal{D}_d(\mathbb{R})$.
4. Montrer que la proposition suivante est fausse : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^2 \ , \ \forall \mu \in Sp(A) \ , \ [A, B] \neq 0 \Rightarrow \mu \in Sp(|A, B])$.

**Exercice 2 :** On pose $H = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \ , \ u(0) = 0 \ , \ u(1) = 1\}$. Pour $u \in H$, on pose $J(u) = \int_0^1 (u^2 + u'^2)$. Déterminer $\underset{H}{inf} J$.

## 20 Probabilités, Analyse.

**Exercice 1 (cf. polycopié 1 Ex 14 :)**
On réalise des lancers successifs d'une pièce équilibrée. Le joueur A mise 2 euros et gagne si on obtient deux piles successifs, le joueur B mise 3 euros et gagne si on obtient un face suivi d'un pile. Le gagnant emporte la mise totale de 5 euros. Lequel des 2 joueurs a le plus de chance de s'enrichir ?

**Exercice 2 :** On considère $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & X & 2X \\ 0 & 1 & X \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer la probabilité que $A$ soit semblable à $B$.

**Exercice 3 :** On considère une famille de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ majorée et qui vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n \leqslant \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2}$$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est constante.

## 21 Algèbre, Analyse.

**Exercice 1 :** On considère $(f, g) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)^2$.

1. On suppose que $g$ est un projecteur. Montrer $Ker(f \circ g) = Ker(g) \oplus (\mathrm{Ker}(f) \cap Im(g))$.
2. On suppose que $f$ est un projecteur. Montrer $Im(f \circ g) = Im(f) \cap (\mathrm{Ker}(f) + Im(g))$.

**Exercice 2 :** On considère une suite $(u_n)$ de réels strictement positifs, et la suite $(v_n)$ définie par $v_0 > 0$, $v_1 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$v_{n+1} = v_n + u_n v_{n-1}$$

Montrer que, si $\sum u_n$ converge, alors $(v_n)$ converge.

## 22 Analyse.

**Exercice 1 :** On pose $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Montrer : $\forall x > 0 \ , \ f \circ f(x) > 1$.
2. Montrer : $\exists ! l \in [1, +\infty[ \ , \ f(l) = l$.

3. On définit $(u_n)$ par $u_0 = a > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Montrer que $(u_n)$ est bien définie et converge vers un réel $l$.
   Déterminer la nature de la série $\sum(u_n - l)$.

**Exercice 2 :** Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient : $\forall P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ , $PA \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{23}$ **Analyse.** On considère $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f'^2$ est intégrable sur $[0,1[$ et $\underset{1^-}{lim} f = 0$.

Montrer que $\underset{x\to 1^-}{lim} \dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x}} = 0$.

$\boxed{24}$ **Algèbre, Analyse**

1. $E$ et $F$ sont deux $K$-espaces vectoriels.
   Pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$, on pose
   $$u^T : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(F,K) & \to & \mathcal{L}(E,K) \\ \phi & \mapsto & \phi \circ u \end{array}$$
   (a) Pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$, montrer que $u^T$ est une application linéaire de $\mathcal{L}(F,K)$ dans $\mathcal{L}(E,K)$.
   (b) Montrer que $u \mapsto u^T$ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{L}\left(\mathcal{L}(F,K), \mathcal{L}(E,K)\right)$.
   (c) On suppose que tout sous-espace vectoriel de $E$ et $F$ admet un supplémentaire.
   Montrer que $u$ est surjective si et seulement si $u^T$ est injective.
   Montrer que $u$ est injective si et seulement si $u^T$ est surjective.

2. On considère $k \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 0$.
   Etudier la convergence des intégrales
   $$\int_1^{\infty} \frac{\sin(kt)}{t^\alpha} dt \quad \texttt{et} \quad \int_1^{\infty} \frac{\sin^k(t)}{t^\alpha} dt$$

$\boxed{25}$ **Analyse, Probabilités**

1. On pose
   $$F : x \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{1+t^x}$$
   (a) Déterminer le domaine de définition $D$ de $F$.
   (b) On pose $a = inf(D)$ et $b = sup(D)$.
   Déterminer les limites de $F$ en $a$ et en $b$.
   (c) Donner un $dl_2$ de $F$ en $0^+$.
   (d) Déterminer un équivalent de $F - \dfrac{1}{2}$ en $0^+$.

2. $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$. On pose $T = min(X,Y)$
   (a) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $P(X \leqslant k)$ puis $P(T \leqslant k)$.
   (b) Déterminer la loi de $T$.

$\boxed{26}$ **Dénombrement et Analyse**
On pose $\alpha_n$ le nombre d'involutions du segment d'entiers $[\![1,n]\!]$ (permutations $\sigma$ de $[\![1,n]\!]$ telles que $\sigma \circ \sigma = id_{[\![1,n]\!]}$.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \alpha_n x^n$.

$\boxed{27}$ **Probabilités, Analyse**

1. On considère $(p,p') \in ]0,1[^2$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires IID telles que $X_n$ suit une loi $\mathcal{B}(p)$ si $n$ est pair, et $X_n$ suit une loi $\mathcal{B}(p')$ si $n$ est impair.
   On pose
   $$Y = inf\{n \in \mathbb{N}^* \ , \ X_n = 1\}$$

(a) Montrer que $Y$ est une variable aléatoire qui vérifie $P(Y = +\infty) = 0$.
(b) Donner la loi de $Y$.
(c) Justifier l'existence et donner la valeur de $V(Y)$.

2. Etudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{2n^\beta}\right)$$

avec $\beta > \alpha > 0$ réels.

$\boxed{28}$ **Algèbre.** On considère la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $a_{i,j} = 1$ si $i = j$ ou $i = 1$ ou $j = 1$, et $0$ sinon.
Déterminer le polynôme caractéristique de $A$.

$\boxed{29}$ **Analyse.** On considère $f : [a, +\infty[\to$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\underset{x\to+\infty}{lim} f'(x) + f(x) = l$. Que peut-on dire de $\underset{x\to+\infty}{lim} f(x)$?

$\boxed{30}$ **Analyse.** On considère $f \in \mathcal{C}'(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ bornée et telle que $f(0) \neq 0$, et $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1 + n^\alpha x^2} dx$$

Déterminer la limite de la suite $(I_n)$.

$\boxed{31}$ **Algèbre.** On définit l'application $\phi$ sur $R_n[X]$ par

$$\phi : P \mapsto X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$$

1. Justifier que $\phi$ est un endomorphisme de $R_n[X]$.
2. $\phi$ est-elle bijective ?
3. $\phi$ est-elle diagonalisable ?
4. Pour $n = 4$, donner les espaces propres de $\phi$.

$\boxed{32}$ **Algèbre.**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

1. On suppose que $rg(A) = rg(A^2) = r$.
   Montrer que $K^n = Ker(A) \oplus Im(A)$.
   Montrer qu'il existe $(C, P) \in \mathcal{GL}_r(K) \times \mathcal{GL}_n(K)$ telle que $A = P^{-1}\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$.
2. On dit que $A$ admet un pseudo-inverse si

$$\exists B \in \mathcal{M}_n(K)\ ,\ \begin{cases} AB = BA \\ A = ABA \\ B = BAB \end{cases}$$

   Montrer que $A$ admet un pseudo-inverse si et seulement si $rg(A) = rg(A^2)$.

# III X-ESCPI (50 minutes sans préparation)

**33** **Algèbre.**
Existe-t-il une matrice inversible d'ordre $n$ telle que toute matrice obtenue par permutation des coefficients reste inversible ?

**34** **Algèbre.**
On pose $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})\ ,\ det(M) = 1\}$ et pour $A \in G$, $ord(A) = inf\{n \in \mathbb{N}\ ,\ A^n = I_2\}$.

1. Montrer que, pour $A \in G$, si $ord(A) < +\infty$, alors $ord(A)$ divise 12.
2. Montrer que, pour $(A, B) \in G^2$ :

$$ord(A) = ord(B) < +\infty \Longrightarrow \exists P \in \mathcal{GL}_2(Q)\ ,\ PAP^{-1} = B$$

Peut-on toujours prendre $P$ dans $G$ ?

**35** **Probabilités, Algèbre.**

1. $X$ est une variable alétoire réelle discrète. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ E\left(X^{2^n}\right) \geqslant E(X)^{2^n}$, et décrire le cas d'égalité.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $S : z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P(n)}{n!} z^n$. Déterminer le rayon de convergence de $S$.
Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ de même degré que $P$ tel que : $\forall z \in C\ ,\ S(z) = Q(z)e^z$.
Déterminer $Q$ si $P(X) = X^3$.

**36** **Probabilités.**
On étudie un groupe de cellules. A l'instant initial $n = 0$, il y en a une. A chaque instant, chaque cellule peut de façon équiprobable : mourir, rester telle qu'elle est, se diviser en 2, se diviser en 3. Calculer la probabilité que le groupe disparaisse.

**37** **Analyse, Probabilités.**
**Exercice 1 :** On considère $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.
Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f' + af$ s'annule sur $[0, 1]$.

**Exercice 2 :** On considère $c \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q \geqslant 3$ et une suite de variables aléatoires $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ IID suivant une loi uniforme sur $E = \{\dfrac{k}{q}\ ,\ k \in \mathbb{N}\ ,\ 0 \leqslant k \leqslant q - 1\}$.
On pose $T_0 = 0$, et , pour $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = T_n + c + \sin(2\pi(T_n - \phi_n))$.
Déterminer $E(T_n)$.

**38** **Analyse.**
On considère $q \in \mathbb{N}$ et on pose $f_q : \lambda \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^{qn}}{(qn)!}$.
Calculer $F_q(\lambda)$ et déterminer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} F_q(\lambda)e^{-\lambda}$ pour $q \in [\![1; 4]\!]$.

**39** **Probabilités.**
On effectue des lancers successifs indépendants d'un dé équilibré à $N$ faces numérotées de 1 à $N$. Le jeu s'arrête lorsque le résultat du lancer $n + 1$ est strictement inférieur à celui du lancer $n$.

1. Calculer la probabilité $\pi_k$ que le jeu s'arrête après le rang $k$.
2. Montrer que $(\pi_k)$ converge vers 0;

**40** **Algèbre**
On considère $\alpha > 0$ et on pose

$$\Omega = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\ ,\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ ,\ X^T AX \geqslant \alpha\|X\|^2\}$$

Déterminer le sous-espace vectoriel $F$ engendré par $\Omega$ et sa dimension.

**41** **ALgèbre**

On pose $H_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $H_n[i,j] = \begin{cases} V_i \texttt{ si } i=j \\ 1 \texttt{ si } |i-j|=1 \\ 0 \texttt{ sinon} \end{cases}$.

Montrer que $H_n$ admet $n$ valeurs propres réelles distinctes.

**42** **Analyse et Probabilités**

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs bornée. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(a) : \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = 0$$

$$(b) : \exists A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \ , \ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} card(A \cap [\![0,n]\!]) = 0 \texttt{ et } \lim_{n\to+\infty, n\notin A} u_n = 0$$

**43** **Algèbre**

On considère $A = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Montrer que $Sp(A) \subset ]0,\pi[$ et $\displaystyle\min_{\lambda\in Sp(A)} \lambda \leqslant \frac{1}{2n-1}$.

**44** **Probabilités**

On considère une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction

$$p_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

est croissante sur $[0,1]$.
Donner ensuite une démonstration probabiliste de ce résultat.

**45** **Probabilités**

On considère $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$, avec $X$ et $Y$ des variables aléatoires indépendantes, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{G}(p)$.

1. Déterminer la probabilité que $M$ soit inversible.
2. Déterminer la probabilité que $M$ soit diagonalisable et, dans ce cas, déterminer les valeurs propres et les espaces propres de $M$.
3. Déterminer la probabilité que $M^8 = I$.
4. Déterminer la probabilité qu'il existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui admet un minimum local strict en $(0,0)$ et dont la matrice Hessienne en $(0,0)$ est $M$.

**46** **Algèbre**

On pose $E$ l'ensemble des polynômes non nuls à coefficients dans $\{-1;0;1\}$ et $A$ l'ensemble des racines des polynômes appartenant à $E$. Déterminer l'adhérence de $A$.

**47** **Algèbre**

1. On considère $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose : $\exists \lambda \in \mathbb{R} \ , \ \chi_A(\lambda) = \chi_A'(\lambda) = 0$.
   Montrer que, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $(v, Av, \ldots, A^{n-1}v)$ est liée.
2. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $T$-périodique sur $\mathbb{R}$ et $a > 0$.
   Montrer qu'il existe un réel $c$ tel que la tangente au graphe de $f$ en $c$ passe par le point $(c+a, f(c+a))$.

**48** **Algèbre.**

On considère une fonction $f \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ telle que : $\forall M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \ , \ f(M) \geqslant 0$.
Montrer que $f$ est une combinaison linéaire des formes linéaires $\phi_X : M \mapsto X^T M X$, avec $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

**49** **Probabilités.**
On considère une partie $A$ de $\mathbb{R}$ de cardinal $n$.
On pose $B = A + A = \{a + a' \ , \ (a, a') \in A^2\}$.
Montrer que $2n - 1 \leqslant card(B) \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Généraliser à $B = kA = A + \cdots + A$ ($k$ fois).

**50** **Analyse.**
On considère une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bornée et telle que : $\forall t \in \mathbb{R} \ , \ f'(t) = f(t-1)$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel $\lambda$ tel que $\lambda = e^{-\lambda}$. On pose $h : s \mapsto f(s-1) - \lambda f(s)$
2. Exprimer $f$ en fonction de $h$.
3. En déduire que $f = 0$.

**51** **Calcul.**
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ dans $\{-1; 1\}$ tels que $n = \sum\limits_{k=1}^{m} \epsilon_k k^2$.

**52** **Analyse.**
On considère $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $(n\{an!\})_{n \in \mathbb{N}}$ converge, en notant $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $a \in Q + e\mathbb{N}$.

# IV ENS

**53** On considère $k \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^k([0,1], \mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^k([0,1], \mathbb{R})$.
On suppose que la suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement vers $f$ et qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \|f_n^{(k)}\|_\infty \leqslant C$$

Montrer que $(f_n)$ converge uniformément vers $f$.

**54** **Analyse et Algèbre**
On pose $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \ , \ f(0) = 0\}$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = \|f + f'\|_\infty$.

1. Montrer que $\| \ \ \|$ est une norme sur $E$.
2. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $f \in E$, on ait $\|f\|_\infty \leqslant \alpha \|f\|$.
3. Les normes $\| \ \ \|$ et $\| \ , \ \|_\infty$ sont -elles équivalentes sur $E$ ?

**55** **Analyse et Probabilités**

1. On tire aléatoirement et indépendamment 2 parties $A$ et $B$ de $[\![1, n]\!]$ (les parties sont équiprobables). Calculer $P(A \cap B) = \emptyset$.
2. Déterminer le rayon de convergence de $\sum p_n x^n$, où $p_n$ est le produit des chiffres de l'écriture en base 10 de $n$.

**56** **Analyse et Algèbre**
On pose $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $D : E \to E$ défini par $D : u \mapsto D(u) = u'$ en posant, pour $n \in \mathbb{N}$, $u'_n = u_{n+1} - u_n$.

1. $D$ est-il injectif ? surjectif ? Quelles sont ses valeurs propres et ses vecteurs propres ?
2. On pose $F = \left\{u \in E \ , \ \sum u_n^2 < +\infty\right\}$ muni du produit scalaire $(u, v) \mapsto < u \ , \ v >= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

   Montrer que $F$ est stable par $D$ puis déterminer l'ensemble $H = \left\{\dfrac{< u \ , \ D(u) >}{\|u\|^2} \ , \ u \in F \setminus \{0\}\right\}$

# V Centrale Math-Info (30m, avec préparation de 30m)

$\boxed{57}$ **Algèbre.**
On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $J$ la matrice de $E$ dont les coefficients sont égaux à 1. On pose $\phi : M \mapsto \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}$.

1. Montrer que $(A, B) \mapsto tr(A^T B)$ est un produit scalaire sur $E$.
2. Justifier que $\phi$ admet un maximum et un minimum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et sur $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.
3. Coder la fonction $\phi$ en Python.
4. On fournit une fonction Python ortho qui prend un entier naturel non nul $n$ et qui renvoie une matrice aléatoire appartenant à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, appartenant à $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ avec probabilité $\frac{1}{2}$.
   En utilisant un échantillon de 8000 matrices orthogonales aléatoires, conjecturer le minimum et la maximum de $\phi$ sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et sur $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.
5. Pour $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, exprimer $\phi(M)$ en fonction de $M$, de $J$ et du produit scalaire ci-dessus.
6. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^T J P = D$, où $D$ est une matrice diagonale que l'on précisera.
7. Démontrer la conjecture de la question 4.

$\boxed{58}$ **Probabilités.**

On considère une urne contenant $N_1$ boules blanches et $N_2$ boules rouges. On tire simultanément $n$ boules, avec $1 \leqslant n \leqslant N_1 + N_2$.
On pose $X$ le nombre de boules blanches tirées.

1. Déterminer la loi de $X$.
2. Ecrire une fonction Python `Hypergeom(N1,N2,n)` qui reproduit l'expérience et renvoie une valeur de $X$.
3. Exprimer l'espérance de $X$ en fonction de $N_1$, $N_2$ et $n$.
4. Ecrire une fonction Python `Moyenne(N1,N2,n,k)` qui reproduit $k$ expériences et renvoie la moyenne des valeurs de $X$ obtenues.
5. On choisit $N_1 = 10$, $N_2 = 13$, $n = 5$ et $k = 100$. Comparer la moyenne empirique et la moyenne théorique.

$\boxed{59}$ **Probabilités.**
On considère une répétition d'épreuves de Bernouilli indépendantes et de même probabilité de succès $p \in ]0, 1[$. On considère $r \in \mathbb{N}^*$ et on pose $X$ le nombre de répétitions avant d'obtenir le $r$-ème succès.

1. Ecrire une fonction Python `Pascal(p,r)` qui reproduit l'expérience et renvoie une valeur de $X$.
2. Ecrire une fonction Python `Moyenne(N1,N2,n,k)` qui reproduit $k$ expériences et renvoie la moyenne des valeurs de $X$ obtenues.
3. Déterminer la loi de $X$.
4. Déterminer l'espérance de $X$.

$\boxed{60}$ **Probabilités.**
On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2$.
2. Ecrire une fonction Python `Puissance(n)` qui renvoie $A^n$.
3. A l'aide de cette fonction, tracer $f : n \mapsto \dfrac{\alpha_n}{\beta_n}$. Que peut-on conjecturer ?
4. Prouver cette conjecture.