Préparation à l'oral

Polycopié 4 - Indications

I Centrale Math(30m sans préparation)

1 Utiliser un isomorphisme.

2 Engagez toujours la démonstration en fonction de la conclusion à montrer, puis chercher à actionner les hypothèses.

3 Q1 : Etudier l'ordre de la valeur propre 0, et utiliser l'expression de la somme des valeurs propres complexes.
Q2 : Factoriser par A^{-1}.
Reconnaître le polynôme caractéristique d'une matrice de rang 1 calculé en une valeur bien choisie.
Cette valeur est 1.

4 Q1 : Pensez à la somme des colonnes, puis à une opération roulante sur les lignes.
Q2 : Exprimer la matrice $M(x) - \lambda I_n$ comme une matrice $M(x')$ et utiliser la Q1.
Q3 : Les espaces propres sont de dimension 1.
On cherche une base de vecteur propres qui ne dépend pas de x.
Méthode 1 : A quelle condition 2 matrices diagonalisables ont-elles une base de diagonalisation commune ?
Vérifier que $M(x)$ et $M(0)$ commutent.
Méthode 2 : Utiliser l'expression du noyau de $M(x) - \lambda I_n$ comme le noyau d'une matrice $M(x')$, et faire le lien entre les différents espaces propres.

5 Faire une comparaison série intégrale et identifier une série convergente par encadrement.

6 C'est un théorème de bijection. On peut établir les dérivabilités successives par récurrence.

7 *Q1 : on utilise une IPP et une comparaison.*
Q2 : On détermine le rayon de la SE et les propriétés de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.
Pour l'aspect borné : dériver S et reconnaître la somme d'une série entière connue.
Ecrire $S(x)$ comme une intégrale et faire le changement de variable $t^2 = u$.
Q3 : On prend $x < 0$ et on montrer que l'intégrale diverge (on peut utiliser la relation de Chasles pour écrire l'intégrale comme une somme de série entière divergente (ce qui n'existe pas, on travaillera sur des intégrales finies...).

8

1. Utiliser une intégration par parties.
2. Ecrire l'intégrale comme la partie réelle d'une intégrale complexe, Développer l'exponentielle en série entière, puis utiliser l'intégration terme à terme.
3. Utiliser le théorème de convergence dominée.

9 Pour majorer, penser à utiliser la monotonie des fonctions.

10 Ex 1 : On tente le théorème d'intégration terme à terme ou le théorème de convergence dominée sur les sommes partielles.

11 Il faut utiliser

$$\theta = \arctan(a) \Leftrightarrow \tan(\theta) = a \texttt{ et } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

On se ramène à une équation différentielle aux dérivées partielles et on passe en coordonnées polaires.

12 Q1: On obtient facilement les extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$ à 'laide des points critiques et de la matrice Hessienne.
Pensez à utiliser une symétrie du graphe pour limiter l'étude.
Pour examiner si les extrema locaux sont des extrema globaux, il faut faire un calcul détaillé de $f(x_0 +$

$\epsilon, y_0 + \epsilon') - f(x_0, y_0)$ pour étudier son signe...
Q2 : Enoncer précisément le théorème d'atteinte des bornes.
Pour les extrema locaux de la restriction de f à la boule unité fermée : sont-ils nécessairement des extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$?
Pour les extrema locaux, globaux de la restriction de f à la boule unité fermée : Où sont-ils nécessairement situés ?
On effectue une étude sur la sphère unité : on étudie ainsi une fonction de la variable θ, argument de (x, y) : on étudie ses extrema locaux et globaux sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

13

1. C'est du calcul.
2. C'est le théorème fondamental de l'intégration, et l'étude de la convergence des intégrales.
3. Bien poser les 2 variables, qui sont des fonctions, l'ancienne et la nouvelle.
4. On utilise Q2 et des encadrements.

14 Penser à faire des changements de variables.

15 *Q1 : On calcule la probabilité que le déterminant soit nul, ce qui a à voir avec la parité de X et de Y.*
Q2 : On peut raisonner de façon générale, ou bien regarder tous les cas particuliers possibles.

16 Exprimer $E(X_{n+1})$ en fonction de $E(X_n)$, $E(X_{n+1}^2)$ en fonction de $E(X_n^2)$.
Décomposer $P(X_{n+1} = k)$ sur le système complet d'événements associé à X_n.

17 On peut établir une relation de récurrence sur les probabilités associées à S_n ou sur les fonctions génératrices.

II Mines-ponts (1h, avec 15m de préparation)

18 Q2 : On se déplace ne partant de 0 dans plusieurs directions, et on montrer que la variation n'est pas de même sens.
Q3,4 : On calcule en-dehors du point 0 les dérivées partielles, puis les matrices hessiennes.
Exercice 2 : On établit des CN en prenant la traca, puis on fait une disjonction de cas.

19 **Exercice 1 :** *Q1 : Penser à gagner du temps en parlant de formes linéaires non nulles, d'hyperplans.*
Q2 : Utiliser la propriété de γ en posant $A = I_d$.
Q3 : Utiliser la propriété de γ en posant $A = E_{i,i}$, et en utilisant pour B des matrices de la base canonique.
Exercice 2 * : *Les inégalités directes, l'étude des fonctions puissances, sont pertinentes mais ne suffisent pas.*
On se place en une fonction u_0 et on examine le signe de $J(u_0 + h) - J(u_0)$.
On peut encore préciser $h = \epsilon h_0$, pour une direction h_0 donnée.
On cherche u_0 tel que $J(u_0 + h) - J(u_0)$ soit toujours positif.

20 **Exercice 1 :** L'issue du jeu en dépend en fait que des 2 premiers lancers.
Exercice 2 : Soit on formalise un changement de base, soit on cherche une matrice P telle que $AP = PB$.
Dans les 2 cas, il est important de simplifier le calcul en plaçant des zéros sur certains coefficients, en utilisant les sous-espaces stables par A.
Exercice 3 : On peut utiliser la suite (vn) qui a les mêmes valeurs que (u_n) en 2 indices successifs fixés, et qui vérifie l'égalité de récurrence, et comparer (u_n) et (v_n).

21 **Exercice 1 :**
On utilise les propriétés d'un projecteur : le noyau et l'image sont supplémentaires, les éléments de l'image sont invariants. **Exercice 2 :**
On écrit une transformation d'Abel puis une phrase quantifiée avec des ϵ.

22 **Exercice 1 :**

1. On écrit $f \circ f$ et des inégalités successives en commençant par encadrer le sinus.

2. On écrit un théorème de bijection.

3. On utilise la stabilité d'un intervalle par f.
   On utilise le théorème des accroissements finis pour majorer $|u_n - l|$. **Exercice 2 :**
   On utilise l'hypothèse pour des matrices de dilatation, de transvection, de transposition.

23 Il faut utiliser une IPP ou Cauchy-Schwarz en les appliquant aux fonctions qui conviennent.

24 Q1 : Ecrire ce que signifie l'injectivité de u^T.
Ecrire ce que signifie la surjectivité de u^T.
Si u est injective, u réalise un isomorphisme de $Im(u)$ dans F.
Si u n'est pas injective, montrer que u^T est surjective en construisant une forme linéaire non atteinte par u^T.
Q2 : Pensez à une comparaison.
Si $\alpha < 1$, pensez à une intégration par partie pour se ramener au cas $\alpha > 1$.
Utilisez une linéarisation.

25 Q1 : 1a / Examiner sur quel intervalle l'intégrande est continue.
Si besoin en 0, utiliser un équivalent en 0.
1b : Utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu.
1c : Utiliser le théorème de dérivation pour trouver le développement de Taylor-Young.
1d : utiliser le développement limité en 0.
Q2 : On peut retrouver $P(X > k)$ sans calcul, puis $P(T > k)$.

26 Faire un pivot par blocs pour se ramener à une matrice triangulaire par blocs, OU étudier $dim(Ker(M))$ en découpant les vecteurs colonnes en 2 sous-colonnes de taille p et $n-p$.

27 Q1 : Il s'agit de vérifier que, pour tout x réel, $Y^{-1}(\{x\})$ est un événement (un élément de la tribu).
Penser à la continuité croissante ou décroissante de la probabilité.
Q1b : Pour le calcul de $P(Y = n)$: séparer le cas n pair et n impair.
Q2 : Ecrire un développement limité.

28 Utiliser la sous-matrice diagonale pour annuler les coefficients de la première colonne.

29 Poser $g = f + f'$ et exprimer f en fonction de g.

30 utiliser le théorème de convergence dominée sur une suite d'intégrales appropriée.

31 Utiliser la base canonique, ou itérer la fonction.

32 Q1 : Utiliser le théorème du rang.
Q2 : Utiliser la similitude de Q1.

III X-ESCPI (50 minutes sans préparation)

33 Commencer par établir que $\mathcal{GL}_n(K)$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(K)$, et expliquer pourquoi ce n'est pas suffisant pour répondre à la question.
On peut penser à montrer qu'il est dense.
Indications donnée par l'examinateur : $\mathcal{GL}_n(K)$ est-il "gros "? y-a-t-il beaucoup de matrices inversibles ?
Utiliser une fonction définie sur $\mathbb{R}^{n^2}$.

34 Q1 : Enoncer des conditions nécessaires sur les valeurs propres de A ($A^n = I, tr(A) \in \mathbb{Z}$). On trouve des couples de valeurs propres possibles et que A est diagonalisable.
Q2 : On utilise les différents cas possibles obtenus dans la question 1.

35 Questions de cours : Probabilités : inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.
Q1 : Une simple récurrence fonctionne.
Q2 : On voit qu'il suffit de montrer la propriété pour les polynômes d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
(car on peut écrire la forme développée de P et échanger le signe somme).
Il convient de choisir une base plus pratique que la base canonique.

36 Décrire chaque instant par un système complet de 4 événements indiquant le type d'évolution qui se produit, ces événements à différents instants sont donc indépendants entre eux.
Ecrire ensuite l'événement étudié, ou son contraire, avec ces événements élémentaires instantanés.

37 **Exercice 1 :** Construire une fonction dont la dérivée est $f' + af$ et utiliser le théorème de Rolle.
Exercice 2 : On exprime $E(T_{n+1})$ en fonction de $E(T_n)$.
On exprime le sin comme la partie imaginaire d'une exponentielle complexe. Avec la propriété que l'espérance du produit est le produit de l'espérance pour 2 variables aléatoires réelles indépendantes, et le théorème du transfert, le calcul se simplifie.

38 Calculer les dérivées successives de f_q et trouver une équation différentielles d'ordre n vérifiée par f_q.
Le fait de trouver une solution particulière évidente et le théorème de Cauchy-Lipschitz permettent d'écrire l'ensemble des solutions.

39

1. On effectue un dénombrement avec équiprobabilité sur les N premiers lancers.
2. On peut étudier le quotient $\dfrac{\pi_{k+1}}{\pi_k}$.

40 On utilise un vecteur propre de la matrice pour obtenir une CN sur les matrices de Ω. On utilise le théorème spectral pour obtenir une CS et déterminer Ω.
Pour le sous-espace vectoriel engendré, on réfléchit à l'impact sur les valeurs propres de combinaisons linéaires.

41 Le plus simple est d'écrire directement une valeur propre et un vecteur propre de la matrice, et de montrer que le sous-espace propre associé est de dimension au plus 1.

42 Si on suppose (b) et qu'on veut montrer (a) :
On prend $\epsilon > 0$, utilise l'écriture quantifiée de la limite, puis on sépare la somme (comme dans la démonstration du théorème de Césaro). On peut séparer encore la somme suivant les indices qui sont dans A ou non.
Si on suppose (a) et qu'on veut montrer (b) :
On cherche à créer A un ensemble d'indice tel que u_n soit supérieur à une suite qui tend vers 0, de telle sorte d'avoir la dernière limite voulue en (b).

43 On montre que A est symétrique définie positive par la définition, en étudiant le signe de XA^TX.
On remarque que le terme général de A s'écrit comme une intégrale, si bien que XA^TX s'écrit comme une norme au sens du produit scalaire habituel de 2 fonctions.
Pour la dernière majoration, il suffit d'utiliser un cas particulier pour X.
Pour la majoration par π, on utilise l'indication suivante, à montrer :

$$\int_{-1}^{1} P(t)dt = \int_{0}^{\pi} P(e^{i\theta})ie^{i\theta}d\theta$$

44 On forme la différence et on effectue des changements d'indices.
On fait apparaître des espérances (par le théorème du transfert) et des lois binomiales.

45 Raisonner sur la somme et le produit des valeurs propres.

46 Etablir des propriétés de symétrie de l'ensemble (par opposé, par inverse), et des CN (inégalités) sur les racines éventuelles des polynômes.

47 Q1 : Diagonalisez A orthogonalement et pensez à utiliser le déterminant.
Q2 : Théorème de Rolle.

48 Ecrivez la forme linéaire à l'aide d'une matrice symétrique, et utilisez le théorème spectral.

49 Recensez des éléments distincts de B, utilisez des combinaisons.

50 Q3 : Majorer f par inégalité triangulaire, en faisant apparaître sa norme infinie, pour montrer qu'elle est nulle.

IV ENS

51 On commence par le cas $k = 1$.
Il faut utiliser bien sûr l'inégalité des accroissements finis.

Pour montrer la convergence vers 0 de la norme infinie, on initie une démonstration quantifiée.
Penser à utiliser une subdivision du segment, que l'on peut rendre aussi fine que l'on veut.
Pour le cas général à l'ordre k, on se ramène au cas pour $k-1$.

52 Q3 : On trouve une suite de fonctions bornée pour une norme mais pas pour l'autre (le quotient des normes n'est donc pas borné).

53 Q1 : C'est un dénombrement avec équiprobabilité.
d'Alembert ? la suite (p_n) est-elle bornée ?
Peut-on majorer la suite (p_n) pour minorer le rayon de convergence ?
Quelle est la situation au pire ?
Utiliser un équivalent, un encadrement ou une écriture asymptotique du nombre de chiffres $C(n)$ de l'écriture en base 10 de n?

54 Q2 : On utilise la majoration d'un produit par la demi-somme des carrés pour montrer la stabilité.
On évalue l'expression pour les suites géométriques, ce qui donne une inclusion.
Pour l'inclusion réciproque, on utilise Cauchy-Schwarz.

V Centrale Math-Info (30m, avec préparation de 30m)

55

Questions de cours :
Equivalence des normes en dimension finie.
Comment montrer qu'une partie est un fermé.
Description et propriétés de la norme canonique sur l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.

Q2 : Utiliser le théorème d'atteinte des bornes. Montrer que les parties sont fermées et bornées.
Q6 : J est de rang 1 et de trace n, on en déduit le polynôme caractéristique de J et sa diagonalisation.
Q7 : On exprime $\phi(M)$ comme un produit scalaire, par manipulation du produit scalaire on se ramène à D. On obtient un maximum de n et un minimum de $-n$.