

Polycopié 3

① Supposons: $\forall x \in E, (x, f(x))$ lié.

Alors: $\forall x \in E \setminus \{0\}, \exists \lambda_x \in K, f(x) = \lambda_x \cdot x$

Soit $(x, y) \in E \setminus \{0\}$.

Le cas: (x, y) est libre.

$$f(x+y) = \lambda_{x+y} \cdot (x+y)$$

$$= f(x) + f(y) = \lambda_x \cdot x + \lambda_y \cdot y, \quad \text{donc } \lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}.$$

Le cas: (x, y) est lié.

$$y = \alpha \cdot x, \quad \text{avec } \alpha \in K^*$$

$$f(y) = \lambda_y \cdot y = (\lambda_y \alpha) \cdot x$$

$$= \alpha \cdot f(x) = (\alpha \lambda_x) \cdot x. \quad \text{donc } \alpha \lambda_x = \alpha \lambda_y \quad \text{donc } \lambda_x = \lambda_y.$$

On a montré: $\exists \lambda \in K, \forall x \in E \setminus \{0\}, f(x) = \lambda \cdot x$
 $\forall x \in E, f(x) = \lambda \cdot x \quad (f(0) = 0)$
 f est 1 homothétie.

② Disposons de (e_i) — est une base de E —

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \exists \lambda_i \in \mathcal{A}, f^{\lambda_i}(e_i) = 0.$$

$$\text{Posons } p = \max_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i).$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, f^p(e_i) = f^{p-\lambda_i}(f^{\lambda_i}(e_i)) = 0$$

$f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$. f est nilpotent.

2 of TD 1 Ex 22

3 of TD 1 Ex 24, 48

4 of TD 1 Ex 30

5 of TD 1 Ex 23

6 of Poly 2 Ex 22

7 of TD 2 Ex 39



Rectorat de l'Académie de Nantes
DEC CMT GT
BP 12818
44320 NANTES CEDEX 3
Tel : 02 40 37 32
Mail : dec.amenagements@dec@ac-nantes.fr

Date de naissance : 02/03/2009
A : PARIS 15^e ARRONDISSEMENT - 078
Identifiant National (INE) : 18002470818
Établissement : Lycée PUY DU FOU ACADEMIE - LES EPRESSES
(0857148)

BALISAN Charles-Henri
11 RUE BLANCHE
Cher Mme GARDES
75008 PARIS

Le 06 mars 2020

Bonjour,
Vous avez demandé à bénéficier de mesures favorables aux candidats en situation de handicap pour le passage de vos épreuves.
Compte tenu de l'avis du médecin désigné par la CDAPH et conformément aux dispositions prévues par les articles D. 112-1, D. 311-13-1, D. 381-58, D. 381-58-1 et D. 813-27 du code de l'éducation, précisées par les directives MENE2019170 du 8/12/2020 et MENE200822C du 17/07/2021, je vous informe que j'autorise les mesures particulières suivantes :

- MH102 - Mentionnais de temps pour les épreuves écrites
- MH303 - Sujets en caractères agrandis - ann. 20
- MH413 - Utilisation de l'ordinateur ou de la tablette du candidat

Ces aménagements sont accordés au titre de l'examen auquel vous vous présentez.
Pour toute information sur la validité des aménagements veuillez consulter le site <https://educol.education.fr/52/accueil/col-application-des-tenures-d-amenagements-examen>

Important : Les aménagements qui vous sont accordés ne seront pas indiqués sur votre convocation, vous devez présenter cette notification à chacune des épreuves concernées par ces mesures. Dès réception de votre convocation, il vous est recommandé de prendre contact avec le chef de centre afin que ces aménagements soient mis en œuvre dans les meilleures conditions. Si vous ne souhaitez pas bénéficier de l'un ou des aménagements accordés, merci de me le notifier par courrier dès réception de cette notification.

Je vous prie d'agréer, l'expression de mes salutations distinguées.

Pour la Rectrice et par délégation,
Le Directeur des Examens et Concours

Jean-Eudes AYMER

VOIES ET DELAIS DE RECOURS
Si vous n'avez pas obtenu de réponses ou à compléter ou la réception de la réponse à votre recours gracieux
contenus devant le tribunal administratif compétent dans un délai de deux mois. Ce délai débute à réception de votre demande.
Si vous estimez que le recours gracieux n'a abouti pas ou que vous estimez ne pas avoir eu satisfaction, vous pouvez ensuite former un recours
recours gracieux adressé à mes services accompagnés de justificatifs nécessaires.
Si vous estimez devoir contester cette décision, vous pouvez former, dans un délai de deux mois à compter de la présente notification, un

8 (1) Pour $A \in \text{Mat}(\mathbb{R})$: $f_A \in \mathcal{L}(\text{Mat}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ (...)

• Pour $(A, B) \in \text{Mat}(\mathbb{R})^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f_{\lambda A + B} : M \mapsto \text{tr}((\lambda A + B)M) \\ = \lambda f_A(M) + f_B(M) \quad f_{\lambda A + B} = \lambda f_A + f_B$$

$$\varphi : A \mapsto f_A \in \mathcal{L}(\text{Mat}(\mathbb{R}), \mathcal{L}(\text{Mat}(\mathbb{R}), \mathbb{R}))$$

• $\dim \text{Mat}(\mathbb{R}) = m = \dim \mathcal{L}(\text{Mat}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

Soit $A \in \text{Ker } \varphi$: $f_A = 0$

$$\forall M \in \text{Mat}(\mathbb{R}), \quad f_A(M) = \text{tr}(AM) = 0$$

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2, \quad \text{tr}(AE_{ij}) = \dots = a_{ji} = 0$$

$$\underline{A = 0}$$

φ est un isomorphisme

② $\forall (i, j, k, \ell) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2$, $f(E_{ij} E_{k\ell}) = f(E_{k\ell} E_{ij})$

Pour $i \neq j$: $f(E_{ii}) = f(E_{ij} E_{ji}) = f(E_{ji} E_{ij}) = f(E_{jj})$

$$f(E_{ij}) = f(E_{ii} E_{ij}) = f(E_{ij} E_{ii}) = f(0) = 0.$$

Posez $\lambda = f(E_{ii})$

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad f(E_{ij}) = \lambda \delta_{ij} = \lambda \text{tr}(E_{ij})$$

donc $f = \lambda \text{tr}$

9 ① • Recherche de CN. (V1)

Soit A une éventuelle solution.

$$\forall X, \varphi(X) = h(AX)$$

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket, \varphi(E_{ij}) = h(AE_{ij}) = a_{ji}.$$

$$A = [\varphi(E_{ji})]_{i,j \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$$

• Recherche de CS: Posons $A = [\varphi(E_{ij})]_{(i,j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket, \varphi(E_{ij}) = a_{ji} = h(AE_{ij})$$

φ et $X \mapsto h(AX)$ sont linéaires et coïncident sur la base canonique,

donc $\varphi = X \mapsto h(AX)$.

(V2) Avec [8] @1.

② q [8] @1.

10 of TD1 Ex 80

11 of TD1 Ex 81

12 of TD1 Ex 54

3.2 (+annexe) Arithmétique et polynômes

Je mets en garde contre ces deux parties : l'arithmétique et les polynômes ne sont pas au cœur du programme de PC, mais néanmoins, il est raisonnablement fréquent à l'examen.

Type de questions et conseils

- en arithmétique, l'avantage est que les commentaires Python sont assez simples à écrire et à lire et qu'ils sont dans la division euclidienne.
- pour l'objet « polynôme », les choses se passent un peu comme pour les entiers d'après l'ordre de priorité du module `Polynomial`. Toutes les opérations sur les polynômes se font dans le module `Polynomial` et correspondent au coefficient constant (il y a donc un langage de saisie-passe mais, comme toujours, dans la programmation, on peut passer).
- **CONSEIL ABSOLU**, évitez dans le langage de jury : si jamais vous avez des polynômes à manipuler, il peut être très facile de passer à `Polynomial(COEFFICIENTS)` au lieu de manipuler les polynômes comme d'habitude.
- une difficulté dans l'arithmétique, la manière dont les opérations s'écrivent ne devrait pas vous gêner.

```

16 >>> X = Polynomial([0, 1])
17
18 >>> Y = X**2 - 3*X + 8
19
20 >>> Y
21 Polynomial([8, -3, 1], domain=[-1, 1], window=[-1, 1])

```

Les parties de gauche et de droite ne sont pas liées du tout à aucun des chapitres de Centrale. Elles sont utiles surtout l'un de l'autre, mais pas l'un sans l'autre.

• dernier point : on vous donnera parfois de résoudre le polynôme caractéristique d'une matrice C est simple, les coefficients sont écrits dans l'ordre inverse de celui dans lequel `Polynomial` il faut donc y faire attention.

Exemples corrigés

3. (RMS 2020-2021 1022) Soit E l'ensemble des polynômes unitaires à n de coefficient dont l'entier égal à 1 à 3 coefficients dans \mathbb{Z} . Si $f(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n) \in E$, avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les racines complexes de f , on définit

$$c(f) = (X - \lambda_1^2) \dots (X - \lambda_n^2)$$

- (a) Écrire une fonction Python $c(f)$ qui renvoie $c(f)$ sans aucun développement.
- (b) Tester cette fonction pour quelques valeurs de $n \leq 10$ et $f \in E$. Les deux ou trois cas.

13 (.) Posons $B = (1, X, \dots, X^m)$. $\text{mat}_B(D) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & m \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$. 6

Pour $i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ $a_{i, i+1} = 1$. sinon $a_{i, j} = 0$

• Recherche de CN: Soit $F \neq \{0\}$ un \mathbb{N} -ev de $\mathbb{R}[X]$, de dim. finie, stable par D .
 Disposons de $B = (P_1, \dots, P_r)$ une base de F .

Posons $m = \max_{1 \leq i \leq r} \deg(P_i) \in \mathbb{N}$. On dispose de $i_0 \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $\deg(P_{i_0}) = m$
 Posons $R = P_{i_0}$.

$$F = \text{vect} \left(P_j \right)_{\substack{1 \leq j \leq r \\ \downarrow \\ 1 \leq j \leq r}} \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \mathbb{R}_m[X] \\ \hline \mathbb{R}_n[X] \end{array} \right.$$

• $\forall i \in \llbracket 0, m \rrbracket$, $\deg D^i(R) = m - i$
 $(D^i(R))_{0 \leq i \leq m}$ est échelonné en degré dans l'ordre.

donc $m+1 \leq \dim F$.

Or $F \subset \mathbb{R}_n[X]$ donc $\dim F \leq n+1$. $\dim F = m+1$, $\frac{F = \mathbb{R}_n[X]}{\text{qui convient}}$

• $(\mathbb{R}_n[X])_{n \in \mathbb{N}}$, $\{0\}$ sont les \mathbb{N} -ev de $\mathbb{R}[X]$ de dim. finie stables par D .

14) • Posons $n = \deg P \geq 1$.

• $\deg P' = n - 1$, donc P' a au plus $n - 1$ racines réelles distinctes.

• Or posons $(x_1 \dots x_n)$ les racines de P , avec $x_1 < \dots < x_n$

Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$: $\exists y_k \in]x_k, x_{k+1}[$, $P'(x_k) = 0$ (Rolle)

P' a au moins $n-1$ racines réelles distinctes.

• P' est scindé à racines simples dans \mathbb{R} .

15) cf. TD 1 Ex. 63.

16) cf. TD 1 Ex. 79.

17) Posons $(x_0 \dots x_n)$ la base de Lagrange associée aux abscisses (x_0, \dots, x_n) de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$P = \sum_{j=0}^n P(x_j) L_j$$

$$\int_0^1 P(t) dt = \sum_{j=0}^n \underbrace{\left(\int_0^1 L_j(t) dt \right)}_{\alpha_j \in \mathbb{R}} \times P(x_j)$$

18) cf. TD 1 Ex. 64.

Complément du (2): On a $(C_1 \dots C_p)$ libre, avec $C_j = A^{p-j} C_p$, $C_p \notin \text{Ker } A^{p-1}$

$$\forall j \in \llbracket 2, p \rrbracket, AC_j = C_{j-1}$$

$$AC_1 = 0$$

On complète $(C_1 \dots C_p)$ en 1 base B' de $\mathcal{U}_{n,1}(K)$.

On pose P la matrice de passage de la base canonique à B' .

$$P^{-1}AP =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \\ & & & & -1 & \\ & & & & & \dots & \\ & & & & & & & * \end{pmatrix}$$

19 ① ② of TD 1 Ex 17.

③ of Poly Ex 31. (ou utilisation du Poly 4 Ex 18).

20 of TD 2 Ex 21.

21 of TD 1 Ex 77

22 $D(a, bc) = \begin{vmatrix} c & & & & \\ & (b) & & & \\ & & (a) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & c \end{vmatrix}_m$

① $D(a, a, c) = \begin{vmatrix} c & & & & \\ & (a) & & & \\ & & (a) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & c \end{vmatrix}_m$ $C_1 \leftarrow \sum_{j=1}^m C_j$

$= [c + (n-1)a] \times \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & c & & & \\ & & (a) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & c \end{vmatrix}_m$ $i_j \leftarrow i_j - 1$ pour j de n à 2

$= [c + (n-1)a] \times \begin{vmatrix} 1 & a & & & a \\ & c-a & & & \\ & & a-c & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & a-c & c-a \end{vmatrix}_m$

$= [c + (n-1)a] \times (c-a)^{m-1}$

(développement selon C_1)

② $\varphi(x) = \begin{vmatrix} c+x & & & & \\ & (b+x) & & & \\ & & (a+x) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & c+x \end{vmatrix}_m$ $C_j \leftarrow C_j - C_1$ pour j de 2 à m

$$\chi_A = \begin{vmatrix} x-3 & 3 & -2 \\ 1 & x-5 & 2 \\ 1 & -3 & x \end{vmatrix}$$

$$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$$

$$= (x-2) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & x-5 & 2 \\ 1 & -3 & x \end{vmatrix}$$

$$C \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$= (x-2) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & x-8 & 4 \\ 0 & -6 & x+2 \end{vmatrix} = (x-2) [(x-8)(x+2) + 24]$$

$$= (x-2) [x^2 - 6x + 8]$$

$$= (x-2)^2 (x-4)$$

• On calcule (...) $E_4 = \text{vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$E_2 = \text{vect} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• Posons $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$

$$P^{-1}AP = D = \text{diag}(4, 2, 2).$$

$$P^{-1}A^m P = D^m = \text{diag}(4^m, 2^m, 2^m)$$

$$A^m = P \times \text{diag}(4^m, 2^m, 2^m) \times P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -4^m & 3 \times 2^m & -2^{m+1} \\ 4^m & 2^m & 0 \\ 4^m & 0 & 2^m \end{pmatrix} \times P^{-1} = \dots$$

$$\textcircled{1} \cdot \chi_{B\lambda} = \begin{vmatrix} x+1-\lambda & -\lambda \\ -1 & x+1 \\ -1 & 0 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+1)^3 - (x+1)(-\lambda) - \lambda(x+1)$$

$$= (x+1)^3$$

• Soit π un plan de $\text{St}_{1,1}(\mathbb{R})$ stable par $B\lambda$
 $(x \mapsto B\lambda x)$ induit sur π un endomorphisme $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\pi)$

$$\chi_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 0$$

$$\pi \subset \text{Ker } \chi_{\mathcal{B}}(B\lambda)$$

Or $\chi_{\mathcal{B}} \mid \chi_{B\lambda}$ et $\deg \chi_{\mathcal{B}} = 2$, donc $\chi_{\mathcal{B}} = (x+1)^2$

$$\bullet (B\lambda + I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda - \lambda \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda \\ 0 & \lambda - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\pi \subset \text{Ker } (B\lambda + I)^2 = \text{vect}(e_1, e_2 + e_3)$$

$$\pi = \text{vect}(e_1, e_2 + e_3) \text{ qui convient}$$

$$\textcircled{2} \cdot B\lambda^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2\lambda & 2\lambda \\ -2 & \lambda+1-\lambda \\ -2 & \lambda & -\lambda+1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet (B\lambda + I)^3 = 0 = B\lambda^3 + 3B\lambda^2 + 3B\lambda + I$$

$$B\lambda (B\lambda^2 + 3B\lambda + 3I) = -I$$

$$B\lambda^{-1} = -B\lambda^2 - 3B\lambda - 3I = \dots$$

28 ① • $\langle f(x+ly) - f(x) - \lambda f(y), z \rangle$

$$= -\langle x+ly, f(z) \rangle + \langle x, f(z) \rangle + \lambda \langle y, f(z) \rangle$$

$$= 0$$

f est linéaire.

• Soit $B = (e_1 - e_n)$ une BON de E.

Pour $A = \text{mat}_B(f)$

$$[A]_{ij} = \langle f(e_j), e_i \rangle = -\langle e_j, f(e_i) \rangle = -[A]_{ji}. \quad \underline{A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$$

② $\varphi: \mathcal{A}(E) \rightarrow \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
 $f \mapsto \text{mat}_B(f)$ est un isomorphisme.

Pour $\mathcal{A} = \{ f \in \mathcal{A}(E), f \text{ antisymétrique} \}$.

$$\varphi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}),$$

donc $\mathcal{A} = \varphi^{-1}(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$ est un sous-esp. de $\mathcal{A}(E)$

et $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
 $= \dim \text{vect} (E_{ij} + E_{ji})_{i < j} = \frac{n(n-1)}{2}$

③ Soit $f \in \mathcal{A}$.

• Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$. $\exists x \in E \setminus \{0\}, f(x) = \lambda x$

Alors $\langle f(x), x \rangle = -\langle x, f(x) \rangle$ donc $\langle x, f(x) \rangle = 0$ ($x \perp f(x)$)

donc $2\lambda \|x\|^2 = 0$
 $\lambda = 0$

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset \{0\}$$

• f diagonalisable $\Rightarrow \exists B'$ base de E, $\text{mat}_{B'}(f) = O_n$

$\Rightarrow f = 0_{\mathcal{A}(E)}$ qui convient.

(4) $f \in \mathcal{L}$, $s = f \circ f$.

(V1) Posons $A = \text{mat}_B(f)$ (B BCN de E)
 $A^2 = \text{mat}_B(s)$

$A^T = -A$

donc $A^2 = -A^T A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. A^2 est diagonalisable dans \mathbb{R} .

De plus: $X^T A^2 X = -X^T A^T A X = -\|AX\|^2 \leq 0$. $-A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
 $\text{Sp}(A^2) = \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-$

(V2) $\langle s(x), y \rangle = \langle f(f(x)), y \rangle = -\langle f(x), f(y) \rangle = +\langle x, s(y) \rangle$
 $s \in \mathcal{S}(E)$, s est diagonalisable.

$\langle s(x), x \rangle = -\langle f(x), f(x) \rangle = -\|f(x)\|^2$. $\text{Sp}(s) \subset \mathbb{R}_-$

(5) $\text{Ker } f \subset \text{Ker } s$.

(V1) $x \in \text{Ker } A^2 \Rightarrow A^2 x = 0 \Rightarrow A^T A x = 0 \Rightarrow \|Ax\|^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker } A$

(V2) $x \in \text{Ker } (s) \Rightarrow \langle s(x), x \rangle = -\|f(x)\|^2 = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker } f$.

Ainsi: $\text{Ker } s \subset \text{Ker } f$

(6) $\exists \tilde{P} \in \mathbb{R}[X]$, $P(A^2) = 0$ et P scinde à racines simples dans \mathbb{R} .

$\tilde{P} = X \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$, avec $(\lambda_1 - \lambda_r) \in \mathbb{R}_+^*$.

Ainsi: $A^2 \prod_{i=1}^r (A^2 - \lambda_i I) = O_n$

$\text{Ker}(\prod_{i=1}^r (A^2 - \lambda_i I)) \subset \text{Ker } A^2 = \text{Ker } A$

$A \prod_{i=1}^r (A^2 - \lambda_i I) = O_n$

$X \prod_{i=1}^r (X^2 - \lambda_i)$ est annulateur de A , et scinde à racines simples dans \mathbb{C}
($\forall i \in \{1, \dots, r\}, \lambda_i \neq 0$)

A est diagonalisable dans \mathbb{C} .

① $(\det A)^2 = (-1)^n \in \mathbb{R}_+$, donc n est pair.

② • $X^2 + 1$ est annulateur de A , et scindi à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$,
 $= (X-i)(X+i)$

donc A est diagonalisable dans \mathbb{C} . | et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{i, -i\}$

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset.$$

$$\sigma_{\mathbb{C}}(A) = \text{Ker}(A - iI_n) \oplus \text{Ker}(A + iI_n)$$

Disposons de $\bar{z}_1 \dots \bar{z}_p$ une base de $\text{Ker}(A - iI_n)$

Alors $\bar{z}_1 \dots \bar{z}_p$ est une base de $\text{Ker}(A + iI_n)$.

$$P = (\bar{z}_1 | \bar{z}_1 \dots | \bar{z}_p | \bar{z}_p) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$$

$$P^{-1}AP = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right)_{1 \leq k \leq p} = B$$

Posons $R_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\chi_{R_k} = X^2 + 1 = (X-i)(X+i)$,

donc R_k est semblable dans \mathbb{C} à $\text{diag}(i, -i)$.

$$P_k^{-1} R_k P_k = \text{diag}(i, -i), \text{ avec } P_k \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$$

$$\text{Posons } Q = \text{diag}(P_1, \dots, P_1) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$$

$$Q^{-1} B Q = \text{diag}(R_1, \dots, R_1).$$

A et $\text{diag}(R_1, \dots, R_1)$ sont semblables dans \mathbb{C} ,

et sont dans $\sigma_n(\mathbb{R})$,

donc (...) A et $\text{diag}(R_1 \dots R_1)$ sont semblables dans \mathbb{R} .

③ Supposons qu'il existe un hyperplan H de $\mathcal{U}_{n-1}(\mathbb{R})$ stable par $f: X \mapsto AX$. 15

$$H \oplus \text{vect}(u) = \mathcal{U}_{n-1}(\mathbb{R}), \text{ avec } u \in \mathcal{U}_{n-1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n-1}\}.$$

Disposons d'une base B de $\mathcal{U}_{n-1}(\mathbb{R})$ adaptée à cette décomposition.

$$\text{mat}_B(f|_B) = \begin{pmatrix} B & X \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \text{ avec } B \in \mathcal{U}_{n-1}(\mathbb{R}), \\ \alpha \in \mathbb{R}, \\ X \in \mathcal{U}_{n-1}(\mathbb{R})$$

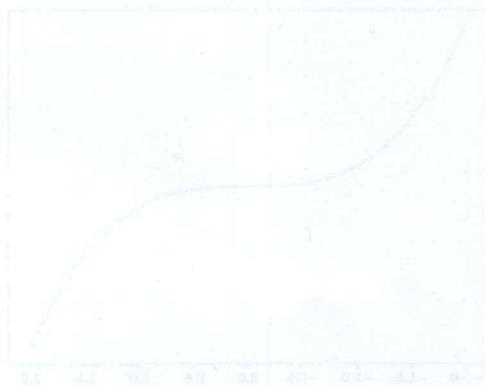
$$\text{mat}_B(f^2) = \begin{pmatrix} B^2 & * \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} = -I_{n-1}$$

donc $\alpha^2 = -1$. Absurde

30 cf TD 2 Ex 13

31 cf TD 2 Ex 14

32 cf TD 2 Ex 15



33
 (V1) $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} a x_1 + \dots + a x_{n-1} + b x_n = \lambda x_1 & L_1 \\ \vdots \\ b x_1 + a x_2 + \dots + a x_n = \lambda x_n & L_n \end{cases}$

Pour $X \neq 0_{n,1}$:
 $A \in S_n(\mathbb{R})$
 donc diagonalisable

$\Leftrightarrow \begin{cases} ((n-1)a + b)(x_1 + \dots + x_n) = \lambda(x_1 + \dots + x_n) & (L_1 + \dots + L_n) \\ (*) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = (n-1)a + b & (*) \\ L_1 \\ \vdots \\ L_{n-1} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x_1 + \dots + x_n = 0 \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n a x_i + (b-a)x_i = \lambda x_{n+1-i} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = (n-1)a + b = \lambda_1 & (*) \\ L_1 \\ \vdots \\ L_{n-1} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda^2 = (b-a)^2 \\ x_1 + \dots + x_n = 0 \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (b-a)x_i = \lambda x_{n+1-i} \end{cases}$

ker $(A - (b-a)I) = \{x_1, \dots, x_n = 0\}$
 donc $\ker(A - (b-a)I) \neq \{0\}$
 donc $\ker(A - \lambda_1 I) = \ker(A - (b-a)I)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = (n-1)a + b \\ \vdots \\ \lambda = (n-1)a + b \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda = b - a \\ \forall i \in [1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor], \kappa_i = \kappa_{n+1-i} \\ \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \kappa_i = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda = a - b \\ \forall i \in [1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor], \kappa_i = -\kappa_{n+1-i} \end{cases}$$

De plus: $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = [(n-1)a + b] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

donc: $(n-1)a + b \in SpA$
 $SpA = \{(n-1)a + b; b - a; a - b\}$ | $SpA^2 = \{(b-a)^2; (b + (n-1)a)^2\}$

V2 • $A \in S_n(\mathbb{R})$ donc A est diagonalisable.

• $A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & & & \\ & \beta & & \\ & & \beta & \\ & & & \alpha \end{pmatrix}$ en posant $\alpha = (n-1)a^2 + b^2$
 $\beta = 2ab + (n-2)a^2$

$= (\alpha - \beta)I + \beta J$, en posant $J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

$rg(A^2 - (\alpha - \beta)I) = rg \beta J \leq 1$, donc $\dim E_\lambda(A^2) \geq n-1$.

$\chi_{A^2} = (X - (\alpha - \beta))^{n-1} (X - \lambda)$ avec $(n-1)(\alpha - \beta) + \lambda = tr A^2 = n\alpha$
 $\begin{cases} \lambda = \alpha + (n-1)\beta = \dots = (n-1)a + b \\ \alpha - \beta = (b-a)^2 \end{cases}$

$SpA^2 = \{(b-a)^2, (n-1)a + b\}$

On $P^{-1}AP = D \Rightarrow P^{-1}A^2P = D^2$

donc $\chi_A = (X - (b-a))^{r_1} (X - (a-b))^{r_2} (X - \mu)^{r_3} (X + \mu)^{r_4}$ en posant $\mu \equiv (n-1)a + b$.

avec $\begin{cases} r_1 + r_2 = \dim E_\lambda(A^2) \geq n-1 \\ r_3 \geq 1 \end{cases}$ (car $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mu \in Sp(A)$)

• $\mu = b - a \Leftrightarrow (n-1)a = -a$ Impossible.

$\mu = a - b \Leftrightarrow (n-1)a + b = a - b \Leftrightarrow (n-2)a + 2b = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$.

• Si: $(n-2)a + 2b \neq 0$. $p \neq a-b$ et $\beta \neq 0$

$$\begin{cases} n_3 = 1 \\ n_1 + n_2 = n - 1 \end{cases}$$

Si: $(n-2)a + 2b = 0$, $p = a-b$ et $\beta = 0$
 $n_1 + n_2 = n$.

Dans tous les cas: $n_4 = 0$

• $Sp(A) \subset \{a-b; b-a; (n-1)a+b\}$

• De plus: $tr A = \begin{cases} ma & \text{si } n \text{ est pair} \\ (n-1)a+b & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

$$\begin{aligned} n_1(b-a) + n_2(a-b) + (n-1)a + b &= tr A \\ n_1 + n_2 &= n - 1 \end{aligned}$$

• Matrices: $n_1 \geq 1, n_2 \geq 1$.

• Supposons $a \neq b$.

Si n est impair: $(n_1 - n_2)(b-a) = 0$
 $n_1 = n_2 = \frac{n-1}{2} \geq 1$ si $n \geq 3$.

Si n est pair: $(n_1 - n_2)(b-a) = a-b$
 $\begin{cases} n_1 - n_2 = -1 \\ n_1 + n_2 = n - 1 \end{cases}$

$$n_1 = \frac{n-2}{2} \geq 1 \text{ si } n \geq 4.$$

$$n_2 = \frac{n}{2} \geq 1$$

On a aussi $Sp(A) = \{a-b; b-a; (n-1)a+b\}$

• Supposons $a = b$: $A = aI$ $ig A = 1$

$$\begin{aligned} \chi_A &= X^{n-1}(X - a) \\ &= X^{n-1}(X - na) \end{aligned}$$

de résultat reste vrai.

• Supposons $a \neq b$,
Si $n = 2$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

$$\chi_A = X^2 - 2aX + a^2 - b^2$$

$$Sp(A) = \{a+b; a-b\} \\ (n_1 = 0).$$

34

On suppose $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- $A^2 = \text{diag}(a_k a_{n+1-k})_{1 \leq k \leq n} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

- $\text{Ker } A = \text{vect}(e_k)_{k \in I}$, en posant $I = \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_k = 0\}$

- $\text{Ker } A^2 = \text{vect}(e_k)_{k \in J}$, en posant $J = \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_k a_{n-k} = 0\}$

- $\text{Ker } A = \text{Ker } A^2 \Leftrightarrow I = J$
 $\Leftrightarrow I$ stable par $k \mapsto n-k+1$

- Montrons $\text{Ker } A = \text{Ker } A^2 \Leftrightarrow A$ diagonalisable dans \mathbb{C} .

Supposons $\text{Ker } A = \text{Ker } A^2$.

$P(A^2) = 0$ avec $P = x^2 \prod_{k=1}^p (x - \lambda_k) \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples, avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$

$P(A^2) = 0$
 donc $P(x^2) = x^2 \prod_{k=1}^p (x^2 - \lambda_k)$
 $= x^2 \prod_{k=1}^p (x - \sqrt{\lambda_k})(x - \overline{\sqrt{\lambda_k}})$ est annulateur de A
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{Q(x)}$

$A^2 Q(A) = 0$
 $\text{Im } Q(A) \subset \text{Ker } A^2 = \text{Ker } A$

donc $A Q(A) = 0$
 $x Q(x)$ est annulateur de A , et scindé à racines simples.

A est diagonalisable dans \mathbb{C} .

Supposons A diagonalisable dans \mathbb{C} .

$P^{-1} A P = D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$, avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$

$P^{-1} A^2 P = D^2$

$\text{Ker } D = \text{Ker } D^2$

donc $\text{Ker } P^{-1} A P = \text{Ker } P^{-1} A^2 P$
 $= \text{Ker } A P = \text{Ker } A^2 P$

Or $\text{Ker } A = \{P^{-1} y, y \in \text{Ker } A P\}$ donc $\text{Ker } A = \text{Ker } A^2$.

• On a montré :

A diagonalisable dans $\mathbb{C} \Leftrightarrow \text{Ker} A^2 = \text{Ker} A$

$\Leftrightarrow I$ stable par $k \mapsto n-k+1$

• Supposons A diagonalisable dans \mathbb{C} .

A diagonalisable dans $\mathbb{R} \Rightarrow \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A^2) = \{ \lambda^2, \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \} \subset \mathbb{R}_+$.

Supposons $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A^2) \subset \mathbb{R}_+$.

Pour $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $\lambda^2 \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A^2) \subset \mathbb{R}_+$
 $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$

A est diagonalisable dans \mathbb{R} .

• On a montré :

A diagonalisable dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} I \text{ stable par } k \mapsto n+1-k \\ \forall k \in [1, n], a_k a_{n+1-k} \geq 0. \end{cases}$

35 $\tilde{f}: \text{Im} f \rightarrow \text{Im} f$
 $x \mapsto f(x)$

• $\text{Sp}(\tilde{f}) \subset \text{Sp}(f)$

Pour $\lambda \in K$:

$$\text{Ker}(\tilde{f} - \lambda \text{id}_E) = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) \cap \text{Im} f$$

$$\text{E}_\lambda(\tilde{f}) = \text{E}_\lambda(f) \cap \text{Im} f \subset \text{E}_\lambda(f)$$

• Soit $\lambda \in \text{Sp}(f) \setminus \{0\}$

$$\exists x \in E \setminus \{0\}, f(x) = \lambda x$$

$$x = \frac{1}{\lambda} f(x) \in \text{Im} f, \text{ donc } \lambda \in \text{Sp}(\tilde{f}).$$

$$\text{et } \text{E}_\lambda(\tilde{f}) = \text{E}_\lambda(f)$$

• Ainsi: $\text{Sp}(f) \setminus \{0\} = \text{Sp}(\tilde{f}) \setminus \{0\}$

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(f) \setminus \{0\}, \text{E}_\lambda(\tilde{f}) = \text{E}_\lambda(f)$$

$$\text{E}_0(\tilde{f}) = \text{Ker } \tilde{f} = \text{Ker } f \cap \text{Im} f$$

$$\textcircled{1} A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ | & & | \\ & (0) & \\ | & & | \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- $\text{Im} A = \text{vect}(U, V)$ en posant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + \dots + e_n$ ((e_1, \dots, e_n) base canonique de $\text{Vect}_n(\mathbb{R})$)
base de $\text{Im} A$ $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + e_n$

- $\text{rg} A = 2$.

- $X \in \text{Ker} A \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^m x_i = 0 \\ x_1 + x_m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_m = -x_1 \\ \sum_{i=2}^{m-1} x_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-2} \\ -\sum_{i=2}^{m-2} x_i \\ -x_1 \end{pmatrix}$

$$\text{Ker} A = \text{vect} \left(e_1 - e_m, (e_i - e_{i+1})_{2 \leq i \leq m-2} \right)$$

de cardinal $m-2 = \dim \text{Ker} A$,

donc est une base de $\text{Ker} A$.

- $\textcircled{2}$ • $A \in \text{Ln}(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans \mathbb{R} .

$$\chi_A = X^{m-2}(X-\lambda)(X-\mu), \text{ avec } \lambda + \mu = \text{tr} A = 2.$$

card $\text{Sp}(A) \in \{2, 3\}$

- $\forall \lambda \quad A^2 = \begin{pmatrix} m & & & \\ & \lambda & & * \\ & & \ddots & \\ & * & & \lambda & \\ & & & & m \end{pmatrix}$

$$[A^2]_{i,i} = G(A)^T G(A)$$

$$= \begin{cases} (1-1) \begin{pmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix} = m & \textcircled{\lambda} \quad i \in \{1, m\} \\ (1-0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 & \textcircled{\lambda} \quad 2 \leq i \leq m-1 \end{cases}$$

$$\chi_{A^2} = X^{m-2}(X-\lambda^2)(X-\mu^2)$$

$$\text{tr} A^2 = \lambda^2 + \mu^2 = 2m + 2(m-2) = 4m - 4$$

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ 2\lambda\mu = (\lambda + \mu)^2 - \lambda^2 - \mu^2 = 4 - (4m - 4) = 8 - 4m \end{cases}$$

$$\lambda, \mu \text{ sont racines de } X^2 - 2X + 4 - 2m = 0$$

$$\Delta' = 1 - (4 - 2m) = 2m - 3$$

$$\lambda, \mu = 1 \pm \sqrt{2m-3}$$

23

$$\textcircled{V2} \quad AU = Ae_1 + \dots + Ae_n = \begin{pmatrix} n \\ 2 \\ | \\ e \\ n \end{pmatrix} = 2U + (n-2)V$$

$$AV = Ae_1 + Ae_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ | \\ 2 \end{pmatrix} = 2U$$

Passons $\tilde{f}: \text{Im}A \rightarrow \text{Im}A$
 $X \mapsto AX$

$$B = \text{mat}_{(U,V)}(\tilde{f}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ n-2 & 0 \end{pmatrix} \quad \chi_B = X^2 - \text{tr}B X + \det B$$

$$= X^2 - 2X - 2(n-2)$$

$$\{\lambda, \mu\} = \text{Sp}(A) \setminus \{0\} = \text{Sp}(B) \setminus \{0\} \quad (\text{cf Ex 35})$$

λ, μ sont racines de $X^2 - 2X - 2(n-2)$.

$$\lambda, \mu = 1 \pm \sqrt{2n-3}$$

③ A est diagonalisable dans \mathbb{R} ,

$$\text{Sp}(A) = \{0; \lambda; \mu\},$$

donc $P = X(X-\lambda)(X-\mu)$ est annulateur de A

$$P = X(X^2 - 2X + 4 - 2n)$$

37 TD2 Ex 16

38 TD2 Ex 17

39 TD2 Ex 19

40 TD2 Ex 20