Polycopié 3

1 ① Supposons : $\forall x \in E,\ (x, f(x))$ liée.

Alors : $\forall x \in E \setminus \{0_E\},\ \exists \lambda_x \in K,\ f(x) = \lambda_x . x$

Soit $(x, y) \in E \setminus \{0_E\}$.

1er cas : (x, y) est libre.

$f(x+y) = \lambda_{x+y} . (x+y)$

$= f(x) + f(y) = \lambda_x . x + \lambda_y . y$, donc $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}$.

2ème cas : (x, y) est liée.

$y = \alpha . x$, avec $\alpha \in K^*$

$f(y) = \lambda_y . y = (\lambda_y \alpha) . x$

$= \alpha . f(x) = (\alpha \times \lambda_x) . x$. donc $\alpha \lambda_x = \alpha \lambda_y$ donc $\lambda_x = \lambda_y$.

On a montré : $\exists \lambda \in K,\ \forall x \in E \setminus \{0_E\},\ f(x) = \lambda . x$ $\quad (f(0) = 0)$

$\forall x \in E,\ f(x) = \lambda . x$

f est 1 homothétie.

---

② Disposons de $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \exists \lambda_i \in \mathbb{N},\ f^{\lambda_i}(e_i) = 0$

Posons $p = \max\limits_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i)$.

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f^p(e_i) = f^{p-\lambda_i}\left(f^{\lambda_i}(e_i)\right) = 0$

$f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$. f est nilpotent.

2

$\boxed{2}$ cf TD 1 Ex 22

$\boxed{3}$ cf TD 1 Ex 24, 48

$\boxed{4}$ cf TD1 Ex 30

$\boxed{5}$ cf TD1 Ex23

$\boxed{6}$ cf. Poly 2 Ex22

$\boxed{7}$ cf TD2 Ex 39.

8 ① • Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: f_A est $\in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ (...)

• Pour $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f_{\lambda A+B} : M \longmapsto \mathrm{tr}((\lambda A+B)M) = \lambda f_A(M) + f_B(M) \qquad f_{\lambda A+B} = \lambda f_A + f_B.$$

$$\varphi : A \longmapsto f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}))$$

• $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n = \dim \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

Soit $A \in \operatorname{Ker} \varphi$: $f_A = 0$

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f_A(M) = \mathrm{tr}(AM) = 0$$

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \mathrm{tr}(AE_{ij}) = \dots a_{ji} = 0$$

$$A = 0$$

φ est un isomorphisme

② $\forall (i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^2$ $f(E_{ij}E_{kl}) = f(E_{kl}E_{ij})$

Pour $i \neq j$: $f(E_{ii}) = f(E_{ij}E_{ji}) = f(E_{ji}E_{ij}) = f(E_{jj})$

$$f(E_{ij}) = f(E_{ii}E_{ij}) = f(E_{ij}E_{ii}) = f(0) = 0.$$

Posons $\lambda = f(E_{11})$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $f(E_{ij}) = \lambda \delta_{ij} = \lambda\, \mathrm{tr}(E_{ij})$

donc $f = \lambda\, \mathrm{tr}$

$\boxed{9}$ ① • Recherche de CN. (V1)

Soit A une éventuelle solution.

$\forall X, \ \varphi(X) = \mathrm{tr}(AX)$

$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \ \varphi(E_{ij}) = \mathrm{tr}(AE_{ij}) = a_{ji}$.

$A = [\varphi(E_{ji})]_{i,j \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$

• Recherche de CS : Posons $A = [\varphi(E_{ij})]_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$

$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \ \varphi(E_{ij}) = a_{ji} = \mathrm{tr}(AE_{ij})$

φ et $X \longmapsto \mathrm{tr}(AX)$ sont linéaires et coïncident sur la base canonique,

donc $\varphi : X \longmapsto \mathrm{tr}(AX)$.

(V2) Avec $\boxed{8}$ Q1.

② cf $\boxed{8}$ Q1.

$\boxed{10}$ cf TD1 Ex 80

$\boxed{11}$ cf TD1 Ex 81

$\boxed{12}$ cf TD1 Ex 54

$\boxed{13}$ (•) Posons $B = (1, X, \dots, X^n)$. $\underset{B}{\mathrm{mat}}(D) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & 2 & \\ & & \ddots & n \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$. 6

Pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ $a_{i,i+1} = i$. sinon $a_{i,j} = 0$

• Recherche de CN. Soit $F \neq \{0_E\}$ un sev de $\mathbb{R}[X]$, de dim. finie, stable par D.

Disposons de $B = (P_1, \dots, P_r)$ une base de F.

Posons $n = \max_{1 \leq i \leq r} \deg(P_i) \in \mathbb{N}$. On dispose de $i_0 \in [\![1, r]\!]$ tel que $\deg(P_{i_0}) = n$

Posons $R = P_{i_0}$.

$F = \mathrm{vect}(P_j)_{1 \leq j \leq r} \subset \mathbb{R}_n[X]$

$\in \mathbb{R}_n[X]$

• $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\deg D^i(R) = n - i$

$(D^i(R))_{0 \leq i \leq n}$ est échelonnée en degré donc libre.

donc $n + 1 \leq \dim F$.

Or $F \subset \mathbb{R}_n[X]$ donc $\dim F \leq n+1$. donc $F = n+1$. $F = \mathbb{R}_n[X]$ qui convient

---

• $(\mathbb{R}_n[X])_{n \in \mathbb{N}}$, $\{0\}$ sont les sev de $\mathbb{R}[X]$ de dim. finie stables par D.

$\boxed{14}$ • Posons $n = \deg P \geq 1$.

• $\deg P' = n-1$, donc P' a au plus $n-1$ racines réelles distinctes.

• Or posons $(x_1 \ldots x_n)$ les racines de P, avec $x_1 < \ldots < x_n$

Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$: $\exists\, y_k \in]x_k, x_{k+1}[$, $P'(x_k) = 0$ (Rolle)

P' a au moins $n-1$ racines réelles distinctes.

• P' est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{15}$ cf. TD 1 Ex. 63

$\boxed{16}$ cf. TD 1 Ex 79

$\boxed{17}$ Posons $(L_0 \ldots L_n)$ la base de Lagrange associée aux abscisses $(x_0, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$: $P = \sum_{j=0}^{n} P(x_j) L_j$

$$\int_0^1 P(t)\,dt = \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\left(\int_0^1 L_j(t)\,dt\right)}_{\alpha_j \in \mathbb{R}} \times P(x_j)$$

$\boxed{18}$ cf TD 1 Ex 64.

Complément du (2) : On a $(C_1 \ldots C_p)$ libre, avec $C_j = A^{p-j} C_p$, $C_p \notin \operatorname{Ker} A^{p-1}$

$$\begin{cases} \forall j \in [\![2, p]\!],\ AC_j = C_{j-1} \\ AC_1 = 0 \end{cases}$$

On complète $(C_1 \ldots C_p)$ en 1 base $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

On pose P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}'$.

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & * \\ 0 & & & 0 & \end{array}\right)$$

$\boxed{19}$ ① ② cf TD 1 Ex 17.

③ cf Poly Ex 31. (ou utilisation du Poly 4 Ex 18).

$\boxed{20}$ cf TD 2 Ex 21.

$\boxed{21}$ cf TD 1 Ex 77

$\boxed{22}$ $D(a,b,c) = \begin{vmatrix} c & & (b) \\ & \ddots & \\ (a) & & c \end{vmatrix}_n$

① $D(a,a,c) = \begin{vmatrix} c & & (a) \\ & \ddots & \\ (a) & & c \end{vmatrix}_n$ $\quad C_1 \leftarrow \sum_{j=1}^{n} C_j$

$= \left[c+(n-1)a\right] \times \begin{vmatrix} 1 & c & & (a) \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & (a) & & c \end{vmatrix}_n$ $\quad L_j \leftarrow L_j - L_1$ pour j de n à 2

$= \left[c+(n-1)a\right] \times \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & c-a & & 0 \\ \vdots & a-c & \ddots & \\ 0 & 0 & a-c & c-a \end{vmatrix}_n$ (développement selon C_1)

$= \left[c+(n-1)a\right] \times (c-a)^{n-1}$.

② $\varphi(x) = \begin{vmatrix} c+x & & (b+x) \\ & \ddots & \\ (a+x) & & c+x \end{vmatrix}_n$ $\quad C_j \leftarrow C_j - C_1$ pour j de 2 à n

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} c+x & & (b) \\ a+x & c & \\ & (a) & \ddots \\ a+x & & c \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=2}^{n} (-1)^{1+i} \times (a+x)\, \Delta_{i1} + (c+x)\, \Delta_{11}}_{\text{ne dépendent pas de } x}$$

$\varphi(x) = \alpha x + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

(3) • $D(a,b,c) = \varphi(0) = \beta$.

• 1er cas : $a \neq b$: $\begin{cases} \varphi(-a) = (c-a)^n = \alpha(-a) + \beta & (1) \\ \varphi(-b) = (c-b)^n = -\alpha b + \beta & (2) \end{cases}$

$b(1) - a(2)$: $b(c-a)^n - a(c-b)^n = \beta(b-a)$

$$D(a,b,c) = \beta = \frac{b(c-a)^n - a(c-b)^n}{b-a}.$$

• 2ème cas : $a = b$. cf Q1.

$\boxed{23}$ cf. TD1 Ex 82.

$\boxed{24}$ cf. Prep. 13 ...

$\boxed{25}$ cf Prep 2 Ex 1.

26

- $$\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & 3 & -2 \\ 1 & X-5 & 2 \\ 1 & -3 & X \end{vmatrix} \qquad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$$

$$= (X-2) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & X-5 & 2 \\ 1 & -3 & X \end{vmatrix} \qquad C \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$= (X-2) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & X-8 & 4 \\ 0 & -6 & X+2 \end{vmatrix} = (X-2)\left[(X-8)(X+2)+24\right]$$

$$= (X-2)\left[X^2-6X+8\right]$$

$$\boxed{= (X-2)^2(X-4)}$$

- On calcule (...) $E_4 = \text{vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \text{vect}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Posons $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in Gl_3(\mathbb{R})$

$P^{-1}AP = D = \text{diag}(4,2,2)$.

$P^{-1}A^nP = D^n = \text{diag}(4^n, 2^n, 2^n)$

$A^n = P \times \text{diag}(4^n, 2^n, 2^n) \times P^{-1}$.

$$= \begin{pmatrix} -4^n & 3\times 2^n & -2^{n+1} \\ 4^n & 2^n & 0 \\ 4^n & 0 & 2^n \end{pmatrix} \times P^{-1} = \dots$$

27

(1) • $\chi_{B\lambda} = \begin{vmatrix} X+1 & -\lambda & -\lambda \\ -1 & X+1 & 0 \\ -1 & 0 & X+1 \end{vmatrix}$

$= (X+1)^3 - (X+1)(-\lambda) - \lambda(X+1)$

$= (X+1)^3$

• Soit π un plan de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ stable par $B\lambda$

$X \mapsto B_\lambda X$ induit sur π un endomorphisme $\tilde{b} \in \mathcal{L}(\pi)$

$\chi_{\tilde{b}}(\tilde{b}) = 0$

$\pi \subset \operatorname{Ker} \chi_{\tilde{b}}(B\lambda)$

Or $\chi_{\tilde{b}} \mid \chi_{B\lambda}$ et $\deg \chi_{\tilde{b}} = 2$, donc $\chi_{\tilde{b}} = (X+1)^2$

• $(B_\lambda + I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$

$\pi \subset \operatorname{Ker}(B\lambda + I)^2 = \operatorname{vect}(e_1, e_2 + e_3)$

$\boxed{\pi = \operatorname{vect}(e_1, e_2+e_3) \text{ qui convient}}$

(2) • $B\lambda^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2\lambda & 2\lambda \\ -2 & \lambda+1 & -\lambda \\ -2 & \lambda & -\lambda+1 \end{pmatrix}$

• $(B\lambda + I)^3 = 0 = B\lambda^3 + 3B\lambda^2 + 3B\lambda + I$

$B\lambda(B\lambda^2 + 3B\lambda + 3I) = -I$

$B\lambda^{-1} = -B\lambda^2 - 3B\lambda - 3I = \dots$

$\boxed{28}$ ① $\bullet \langle f(x+\lambda y) - f(x) - \lambda f(y), z \rangle =$

$= -\langle x+\lambda y, f(z)\rangle + \langle x, f(z)\rangle + \lambda \langle y, f(z)\rangle$

$= 0$

f est linéaire.

• Soit $\mathcal{B} = (e_1 \ldots e_n)$ une BON de E.

Posons $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$

$[A]_{i,j} = \langle f(e_j), e_i\rangle = -\langle e_j, f(e_i)\rangle = -[A_{i,j}]$. $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

② $\varphi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$f \longmapsto \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme.

Posons $\mathcal{A} = \{ f \in \mathcal{L}(E),\ f \text{ antisymétrique} \}$.

$\varphi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$,

donc $\mathcal{A} = \varphi^{-1}(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$

et $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

$= \dim \text{vect}(E_{ij} + E_{ji})_{i<j} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

③ Soit $f \in \mathcal{A}$.

• Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(f)$. $\exists x \in E\setminus\{0_E\},\ f(x) = \lambda x$

Alors $\langle f(x), x\rangle = -\langle x, f(x)\rangle$ donc $\langle x, f(x)\rangle = 0$ $(x \perp f(x))$

donc $\lambda \|x\|^2 = 0$

$\lambda = 0$

$Sp_{\mathbb{R}}(f) \subset \{0\}$

• f diagonalisable $\Rightarrow \exists \mathcal{B}'$ base de E, $\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = O_n$

$\Rightarrow f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ qui convient.

④ $f \in \mathcal{A}$, $s = f \circ f$.

(V1) Posons $A = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(f)$ ($\mathcal{B}$ BON de E)

$A^2 = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(s)$

. $A^T = -A$

donc $A^2 = -A^T A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. A^2 est $\underline{\text{diagonalisable dans } \mathbb{R}}$.

Δ ______

De plus : $X^T A^2 X = -X^T A^T A X = -\|AX\|^2 \leq 0$. $-A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A^2) = \mathrm{Sp}(\Delta) \subset \mathbb{R}_-}$

(V2) • $\langle s(x), y \rangle = \langle f(f(x)), y \rangle = -\langle f(x), f(y) \rangle = +\langle x, s(y) \rangle$

$s \in \mathcal{S}(E)$, s est $\boxed{\text{diagonalisable.}}$

• $\langle s(x), x \rangle = -\langle f(x), f(x) \rangle = -\|f(x)\|^2$. $\boxed{\mathrm{Sp}(s) \subset \mathbb{R}_-}$

---

⑤ • $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker}\, s$.

(V1) $X \in \mathrm{Ker} A^2 \Rightarrow A^2 X = 0 \Rightarrow A^T A X = 0 \Rightarrow \|AX\|^2 = 0 \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow X \in \mathrm{Ker} A$

(V2) $x \in \mathrm{Ker}(s) \Rightarrow \langle s(x), x \rangle = -\|f(x)\|^2 = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker} f$.

Ainsi : $\boxed{\mathrm{Ker}\, s \subset \mathrm{Ker} f}$

---

⑥ $\exists \tilde{P} \in \mathbb{R}[X]$, $P(A^2) = 0$ et P scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$.

$\tilde{P} = X \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$, avec $(\lambda_1 \ldots \lambda_r) \in \mathbb{R}_-^*$.

Ainsi, $A^2 \prod_{i=1}^{r} (A^2 - \lambda_i I) = O_n$

$\mathrm{Ker}\left(\prod (A^2 - \lambda_i I)\right) \subset \mathrm{Ker} A^2 = \mathrm{Ker} A$

$A \prod (A^2 - \lambda_i I) = O_n$

$X \prod_{i=1}^{r} (X^2 - \lambda_i)$ est annulateur de A, et scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$

($\forall i \in [\![1, r]\!]$ $\lambda_i \neq 0$)

$\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{C}.}$

29 Ex 1

① $(\det A)^2 = (-1)^n \in \mathbb{R}_+$, donc n est pair.

② • X^2+1 est annulateur de A, et scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$,
$= (X-i)(X+i)$

donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. | et $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \{i, -i\}$

$Sp_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.

• $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = \mathrm{Ker}(A - iI_n) \oplus \mathrm{Ker}(A + iI_n)$

Disposons de $z_1 \text{———} z_p$ une base de $\mathrm{Ker}(A - iI_n)$

Alors $\overline{z_1} \text{———} \overline{z_p}$ est une base de $\mathrm{Ker}(A + iI_n)$

$P = (z_1 | \overline{z_1} \ldots | z_p | \overline{z_p}) \in GL_n(\mathbb{C})$

$P^{-1}AP = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right)_{1 \leq k \leq p} = B$.

Posons $R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\chi_R = X^2 + 1 = (X-i)(X+i)$,

donc R_1 est semblable dans $\mathbb{C}$ à $\mathrm{diag}(i, -i)$.

$P_1^{-1} R_1 P_1 = \mathrm{diag}(i, -i)$, avec $P_1 \in GL_2(\mathbb{C})$

Posons $Q = \mathrm{diag}(P_1, \ldots P_1) \in GL_n(\mathbb{C})$

$Q^{-1} B Q = \mathrm{diag}(R_1, \ldots, R_1)$.

A et $\mathrm{diag}(R_1, \ldots, R_1)$ sont semblables dans $\mathbb{C}$,

et sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

donc (...) A et $\mathrm{diag}(R_1 \text{—} R_1)$ sont semblables dans $\mathbb{R}$.

14

③ Supposons qu'il existe un hyperplan H de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ stable par $f : X \mapsto AX$.

· $H \oplus \mathrm{vect}(u) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, avec $u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$.

Disposons d'une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ adaptée à cette décomposition.

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} B & X \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \text{ avec } B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \; \alpha \in \mathbb{R}, \; X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(f^2) = \begin{pmatrix} B^2 & * \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} = -I_n,$$

donc $\alpha^2 = -1$. Absurde !

$\boxed{30}$ cf TD 2 Ex 13

$\boxed{31}$ cf TD2 Ex 14

$\boxed{32}$ cf TD 2 Ex 15

$\boxed{33}$

V1 $AX = \lambda X \iff (*) \begin{cases} a x_1 + \dots + a x_{n-1} + b x_n = \lambda x_1 & L_1 \\ \vdots & \vdots \\ b x_1 + a x_2 + \dots + a x_n = \lambda x_n & L_n \end{cases}$

Pour $X \neq 0_{n,1}$:

$A \in S_n(\mathbb{R})$ donc diagonalisable

$\iff \begin{cases} \big((n-1)a+b\big)(x_1 + \dots + x_n) = \lambda (x_1 + \dots + x_n) & (L_1 + \dots + L_n) \\ (*) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \lambda = (n-1)a+b \\ L_1 \\ \vdots \\ L_{n-1} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = 0 \\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a x_i}_{0} + (b-a) x_i = \lambda x_{n+1-i} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \lambda = (n-1)a+b = \lambda_1 \\ L_1 \\ \vdots \\ L_{n-1} \end{cases}$ ou $\begin{cases} \lambda^2 = (b-a)^2 = \lambda_2 \\ x_1 + \dots + x_n = 0 \\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ (b-a) x_i = \lambda x_{n+1-i}. \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = (n-1)a+b \\ L_1 \\ \vdots \\ L_{n-1} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda = b-a \\ \forall i \in [\![1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]\!], \ x_i = x_{n+1-i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda = a-b \\ \forall i \in [\![1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]\!], \ x_i = -x_{n+1-i} \end{cases}$$

De plus: $A\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = [(n-1)a+b]\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$.

donc : $(n-1)a+b \in \mathrm{Sp}A$

$$\mathrm{Sp}A = \{(n-1)a+b \,;\, b-a \,;\, a-b\}$$

$$\mathrm{Sp}A^2 = \{(b-a)^2 \,;\, (b+(n-1)a)^2\}$$

$\boxed{V2}$ • $A \in S_n(\mathbb{R})$ donc A est diagonalisable.

• $A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & & \beta \\ & \ddots & \\ \beta & & \alpha \end{pmatrix}$ en posant $\alpha = (n-1)a^2+b^2$

$\beta = 2ab+(n-2)a^2$

$= (\alpha-\beta)I + \beta J$, en posant $J = (1)$

$\mathrm{rg}\,(A^2-(\alpha-\beta)I) = \mathrm{rg}\,\beta J \leq 1$, donc $\dim E_\lambda(A^2) \geq n-1$.

$\chi_{A^2} = (X-(\alpha-\beta))^{n-1}(X-\lambda)$ avec $(n-1)(\alpha-\beta)+\lambda = \mathrm{tr}\,A^2 = n\alpha$

$$\left| \begin{array}{l} \lambda = \alpha+(n-1)\beta = \dots = ((n-1)a+b)^2. \\ \alpha-\beta = (b-a)^2. \end{array} \right.$$

$$\mathrm{Sp}A^2 = \{(b-a)^2, ((n-1)a+b)^2\}$$

• On $P^{-1}AP = D \Rightarrow P^{-1}A^2P = D^2$

donc $\chi_A = (X-(b-a))^{r_1} \times (X-(a-b))^{r_2} \times (X-\mu)^{r_3}(X+\mu)^{r_4}$ en posant $\mu = (n-1)a+b$.

avec $\left| \begin{array}{l} r_1+r_2 = \dim E_\lambda(A^2) \geq n-1 \\ r_3 \geq 1 \end{array} \right.$ $\left(\text{car } A\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}, \ \mu \in \mathrm{Sp}(A)\right)$

• $\mu = b-a \Leftrightarrow (n-1)a = -a$ Impossible.

$\mu = a-b \Leftrightarrow (n-1)a+b = a-b \Leftrightarrow (n-2)a+2b = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$.

- Si : $(n-2)a+2b \neq 0$. $\mu \neq a-b$ et $\beta \neq 0$

$$\begin{cases} r_3 = 1 \\ r_1 + r_2 = n-1 \end{cases}$$

Si : $(n-2)a+2b=0$, $\mu = a-b$ et $\beta = 0$

$r_1 + r_2 = n$.

Dans tous les cas : $\boxed{r_4 = 0}$

- $Sp(A) \subset \{a-b\,;\, b-a\,;\,(n-1)a+b\}$
- De plus : $trA = \begin{cases} na & \text{si } n \text{ est pair} \\ (n-1)a+b & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

$$r_1(b-a) + r_2(a-b) + (n-1)a + b = trA$$
$$r_1 + r_2 = n-1$$

- Montrons : $r_1 \geq 1$, $r_2 \geq 1$.

- Supposons $a \neq b$.

Si n est impair : $(r_1 - r_2)(b-a) = 0$

$r_1 = r_2 = \frac{n-1}{2} \geq 1$ si $n \geq 3$.

Si n est pair : $(r_1 - r_2)(b-a) = a-b$

$$\begin{cases} r_1 - r_2 = -1 \\ r_1 + r_2 = n-1 \end{cases}$$

$r_1 = \frac{n-2}{2} \geq 1$ si $n \geq 4$.

$r_2 = \frac{n}{2} \geq 1$

On a montré $Sp(A) = \{a-b\,;\, b-a\,;\,(n-1)a+b\}$

- Supposons $a=b$: $A = aJ$ $\quad rg A = 1$, $\chi_A = X^{n-1}(X - trA)$

$= X^{n-1}(X-na)$

Le résultat reste vrai.

- Supposons $a \neq b$,

Si $n=2$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ $\quad \chi_A = X^2 - 2aX + a^2 - b^2$ $\quad Sp(A) = \{a+b\,;\, a-b\}$

$(r_1 = 0)$.

$\boxed{34}$ On suppose $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- $A^2 = \text{diag}(a_k a_{n+1-k})_{1 \leq k \leq n} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

- $\text{Ker}\, A = \text{vect}(e_k)_{k \in I}$, en posant $I = \{k \in [\![1,n]\!],\ a_k = 0\}$

$\text{Ker}\, A^2 = \text{vect}(e_k)_{k \in J}$, en posant $J = \{k \in [\![1,n]\!],\ a_k a_{n-k} = 0\}$

$\text{Ker}\, A = \text{Ker}\, A^2 \iff I = J$

$\iff$ I stable par $k \longmapsto n-k+1$

- Montrons $\text{Ker}\, A = \text{Ker}\, A^2 \iff A$ diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

□ Supposons $\text{Ker}\, A = \text{Ker}\, A^2$.

$P(A^2) = 0$ avec $P = X^2 \prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k) \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples.
avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^{*p}$

$P(A^2) = 0$

donc $P(X^2) = X^2 \prod_{k=1}^{p}(X^2 - \lambda_k)$

$= X^2 \underbrace{\prod_{k=1}^{p}(X - \mu_k)(X - \overline{\mu_k})}_{Q(X)}$ est annulateur de A

$A^2 Q(A) = 0$.

$\text{Im}\, Q(A) \subset \text{Ker}\, A^2 = \text{Ker}\, A$

donc $A Q(A) = 0$, et scindé à racines simples.

$X Q(X)$ est annulateur de A,

A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

□ Supposons A diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

$P^{-1} A P = D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$, avec $P \in GL_n(\mathbb{C})$

$P^{-1} A^2 P = D^2$

$\text{Ker}\, D = \text{Ker}\, D^2$

donc $\text{Ker}\, P^{-1} A P = \text{Ker}\, P^{-1} A^2 P$

$= \text{Ker}\, AP = \text{Ker}\, A^2 P$.

Or $\text{Ker}\, A = \{P^{-1} Y,\ Y \in \text{Ker}\, AP\}$ donc $\text{Ker}\, A = \text{Ker}\, A^2$.

- On a montré :

A diagonalisable dans $\mathbb{C}$ $\iff \operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{Ker} A$

$\iff I$ stable par $k \longmapsto n-k+1$

- Supposons A diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

A diagonalisable dans $\mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A^2) = \{\lambda^2, \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)\} \subset \mathbb{R}_+$.

Supposons $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A^2) \subset \mathbb{R}_+$.

Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $\lambda^2 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A^2) \subset \mathbb{R}_+$

$\lambda \in \mathbb{R}$.

$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$

A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

- On a montré :

A diagonalisable dans $\mathbb{R} \iff \begin{cases} I \text{ stable par } k \longmapsto n+1-k \\ \forall k \in [\![1,n]\!],\ a_k a_{n+1-k} \geq 0. \end{cases}$

$\boxed{35}$ $\tilde{f} : \mathrm{Im} f \longrightarrow \mathrm{Im} f$

$\qquad x \longmapsto f(x)$

- $Sp(\tilde{f}) \subset Sp(f)$

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\underbrace{\mathrm{Ker}(\tilde{f} - \lambda id_E)}_{=\,E_\lambda(\tilde{f})} = \mathrm{Ker}(f - \lambda id_E) \cap \mathrm{Im} f$$

$$E_\lambda(\tilde{f}) = E_\lambda(f) \cap \mathrm{Im} f \subset E_\lambda(f)$$

- Soit $\lambda \in Sp(f) \setminus \{0_\mathbb{K}\}$

$\exists x \in E \setminus \{0_E\}, \quad f(x) = \lambda x$

$x = \frac{1}{\lambda} f(x) \in \mathrm{Im} f$, donc $\lambda \in Sp(\tilde{f})$.

et $E_\lambda(\tilde{f}) = E_\lambda(f)$

- Ainsi : $Sp(f) \setminus \{0_\mathbb{K}\} = Sp(\tilde{f}) \setminus \{0_\mathbb{K}\}$

$\forall \lambda \in Sp(f) \setminus \{0_\mathbb{K}\}, \quad E_\lambda(\tilde{f}) = E_\lambda(f)$

$E_0(\tilde{f}) = \mathrm{Ker}\, \tilde{f} = \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im} f$

$\boxed{36}$ ① $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (0) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

- $\mathrm{Im}\,A = \mathrm{vect}\underbrace{(U, V)}_{\text{base de } \mathrm{Im}\,A}$ en posant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + \dots + e_n$ $\big((e_1 \cdots e_n)$ base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)$

$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + e_n$

- $\mathrm{rg}A = 2$.

- $X \in \mathrm{Ker}A \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ x_1 + x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_n = -x_1 \\ \sum_{i=2}^{n-1} x_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ -\sum_{i=2}^{n-2} x_i \\ -x_1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}A = \mathrm{vect}\underbrace{\left(e_1 - e_n, (e_i - e_{n-1})_{2 \leq i \leq n-2}\right)}$

de cardinal $n-2 = \dim \mathrm{Ker}A$,

donc est une base de $\mathrm{Ker}A$.

---

② • $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

$\chi_A = X^{n-2}(X-\lambda)(X-\mu)$, avec $\lambda + \mu = \mathrm{tr}A = 2$. card $Sp(A) \in \{2;3\}$

• V1 $A^2 = \begin{pmatrix} n & & & * \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & 2 & \\ * & & & n \end{pmatrix}$ $[A^2]_{i,i} = C_i(A)^T C_i(A)$

$= \begin{cases} (1 \cdots 1)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n & \text{si } i \in \{1; n\} \\ (1 0 \cdots 0 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 & \text{si } 2 \leq i \leq n-1 \end{cases}$

$\chi_{A^2} = X^{n-2}(X-\lambda^2)(X-\mu^2)$

$\mathrm{tr}A^2 = \lambda^2 + \mu^2 = 2n + 2(n-2) = 4n - 4$

$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ 2\lambda\mu = (\lambda+\mu)^2 - \lambda^2 - \mu^2 = 4 - (4n-4) = 8 - 4n \end{cases}$

λ, μ sont racines de $X^2 - 2X + 4 - 2n = 0$

$\Delta' = 1 - (4 - 2n) = 2n - 3$ $\boxed{\lambda, \mu = 1 \pm \sqrt{2n-3}}$

(V2) $AU = Ae_1 + \dots + Ae_n = \begin{pmatrix} n \\ 2 \\ | \\ 2 \\ n \end{pmatrix} = 2U + (n-2)V$

$AV = Ae_1 + Ae_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ | \\ 2 \end{pmatrix} = 2U$

Posons $\tilde{f} : \operatorname{Im} A \longrightarrow \operatorname{Im} A$
$\quad X \longmapsto AX$

$B = \underset{(U,V)}{\operatorname{mat}}(\tilde{f}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ n-2 & 0 \end{pmatrix}$.

$\chi_B = X^2 - \operatorname{tr} B\, X + \det B$
$= X^2 - 2X - 2(n-2)$
(cf Ex 35)

$\{\lambda ; \mu\} = Sp(A) \setminus \{0\} = Sp(B) \setminus \{0\}$

λ, μ sont racines de $X^2 - 2X - 2(n-2)$.

$\boxed{\lambda, \mu = 1 \pm \sqrt{2n-3}}$

(3) A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

$Sp(A) = \{0 ; \lambda ; \mu\}$.

donc $P = X(X-\lambda)(X-\mu)$ est annulateur de A

$\boxed{P = X(X^2 - 2X + 4 - 2n)}$

37 TD2 Ex 16

38 TD2 Ex 17

39 TD2 Ex 19

40 TD2 Ex 20