Ex 60 ② • $\forall M \in O_n(\mathbb{R})$, $\|M\|_2 = \sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n} M_{i,j}^2} = \sqrt{tr(M^T M)} = \sqrt{tr(I_n)} = \sqrt{n}$.

$\Big(|M_{i,j}| \leq \|C_j^M\|_2 = 1$ $\quad (C_1^M, \dots C_n^M)$ BON de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ euclidien canonique

C_j^M : jème colonne de M

$\|M\|_\infty \leq 1 \Big)$

$O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$ sont bornés

• $O_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{I_n\})$, en posant $\varphi : M \longmapsto M^T M$ continue (. . .)

(composée de $M \longmapsto (M^T, M)$, linéarité de la transposition

par $(A, B) \longmapsto AB$: continuité du produit matriciel)

bilinéaire....

$\{I_n\}$ fermé

$O_n(\mathbb{R})$ est fermé

• $SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}(\{1\})$ est fermé. • φ est continue

det continue

• Theo. d'atteinte des bornes $\rightarrow$ φ admet un max et un min sur $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$

③
```
import numpy as np

def phi(M):
    (n, p) = np.shape(M)
    s = 0
    for i in range(n):
        for j in range(p):
            s += M[i,j]
    return s
```

④
```
def simul(n):
    mini = n      # min, max sur On(R)
    maxi = n
    mini1 = n     # min, max sur SOn(R)
    maxi1 = n
    for i in range(8000):
        M = ortho
        a = phi(M)
        if a < mini:
            mini = a
        if a > maxi:
            maxi = a
        if det(M) > 0:
            if a < mini1
                mini1 = a
            if a > maxi1
                maxi1 = a
    return mini, maxi, mini1, maxi1
```

⑤ $\varphi(M) = \mathrm{tr}(JM)$

---

⑥ $\mathrm{rg}\, J = 1$, $\dim \mathrm{Ker}\, J = n-1$, $\chi_J = X^{n-1}(X - \mathrm{tr}\, J) = X^{n-1}(X-n)$

$J \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: Th. Spectral $\rightarrow$ $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $P^T J P = D = \mathrm{diag}(0, \dots, 0, n)$

---

⑦ $\varphi(I_n) = n$, $\varphi(-I_n) = -n$ et $I_n \in S\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Pour $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$:

$$|\varphi(M)| = \mathrm{tr}(P^T D P M) = \mathrm{tr}(D \underbrace{P M P^T}_{M'}) = \sum_{i=1}^{n} D_{i,i} M'_{i,i} = n M'_{n,n}.$$

Produit scalaire canonique

Or $|M'_{n,n}| \leqslant \|C_n^{M'}\|_2 = 1$ car $M' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

$n$ième colonne de M' ; $(C_1^{M'}, \dots, C_n^{M'})$ est ON dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ euclidien canonique

$|\varphi(M)| \leqslant n$

$\max_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \varphi = \max_{S\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \varphi = n$, $\min_{S\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \varphi = \min_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \varphi = -n$