Ex 38

38

I ① • Pour $n = 0$: $E(X) \geqslant E(X)$ (en supposant que $E(X)$ existe)

• Pour $n = 1$: Supposons que X^2 admet une espérance finie.

Alors X ______ $\left(|X| \leqslant \frac{1+X^2}{2}\right)$

$$E(X^2) - E(X)^2 = E\left((X - E(X))^2\right) = V(X) \geqslant 0$$

• Supposons que $E(X^{2^n}) \geqslant E(X)^{2^n}$, avec $n \in \mathbb{N}$ donné.

et que $X^{2^{n+1}} = X^{2^n} \times X^2$ admet une espérance finie.

Alors $E(X^{2^{n+1}}) = E\left[(X^{2^n})^2\right] \geqslant E(X^{2^n})^2 \geqslant \left(E(X)^{2^n}\right)^2 = E(X)^{2^{n+1}}$

D'après la propriété au rang 2.

De plus : $E(X^{2^{n+1}}) = E(X)^{2^{n+1}} \Rightarrow E(X^{2^n}) = E(X)^{2^n}$

• On a montré par récurrence que, si X admet un moment à tout ordre :

$\forall n \in \mathbb{N}, E(X^{2^n}) \geqslant E(X)^{2^n}$

et $E(X^{2^n}) = E(X)^{2^n} \Rightarrow \dots \Rightarrow E(X^2) = E(X)^2 \Rightarrow V(X) = 0 \Rightarrow X$ quasi-constante

(ce qui est suffisant)

• Remarque : Si X admet un moment à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$:

Alors, pour $p \in [\![0, n]\!]$: $|X|^p \leqslant 1 + |X|^n$

donc X admet un moment à tout ordre inférieur à n.

39

(*) Pour $n \in \mathbb{N}$: posons $a_n = \frac{P(n)}{n!} = \Theta\Big(\underbrace{\frac{n^{\deg(P)}}{n!}}_{a_n}\Big)$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\deg(P)} \times \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

S est de rayon de convergence infini

(*) Si $P = 0_{\mathbb{C}[X]}$, $Q = 0$ convient

Supposons $P \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$ et posons $p = \deg(P) \in \mathbb{N}$.

- Pour $k \in [\![0,p]\!]$: posons $P_k = \begin{cases} X(X-1)\dots(X-k+1) & \text{si } k \in [\![1,p]\!] \\ 0 & \text{si } k = 0. \end{cases}$

$(P_k)_{0 \leq k \leq p}$ est libre (car échelonnée en degré),

et de cardinal $p+1 = \dim \mathbb{R}_p[X]$,

donc est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

- Prenons $k \in [\![0,p]\!]$: Posons $S_k : z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_k(n)}{n!} z^n$

Pour $z \in \mathbb{C}$:

$$S_k(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n!} z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n-k)!} = z^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = z^k e^z = Q_k(z) e^z \text{ en posant } Q_k = X^k$$

- Posons $P(X) = \sum_{k=0}^{p} \underbrace{a_k}_{\in \mathbb{C}} P_k$

$$S_P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{p} a_k \frac{P_k(n)}{n!} z^n$$

$$= \sum_{k=0}^{p} a_k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_k(n)}{n!} z^n$$

$$= \sum_{k=0}^{p} a_k S_k(z) = \sum_{k=0}^{p} a_k z^k e^z = Q(z) \times e^z \text{ en posant}$$

$$Q = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{R}_p[X].$$

De plus : $a_p = 1$ (le coef. dominant de P

est $[P]_p = \sum_{k=0}^{p} a_k \underbrace{[P_k]_p'}_{\substack{0 \text{ si } k<p \\ 1 \text{ si } k=p}}$

donc $\deg Q = p = \deg P$.

✱ $P(X) = X^3$

$P_3 = X(X-1)(X-2) = X^3 - 3X^2 + 2X$

$$P(X) = X^3 = P_3 + 3X^2 - 2X$$
$$= P_3 + 3\big(X(X-1) + X\big) - 2X$$
$$= P_3 + 3P_2 + P_1$$

$a_3 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_1 = 1, \quad a_0 = 0$

$\boxed{Q(X) = X^3 + 3X^2 + X}$