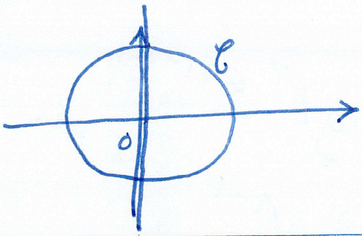
Ex 18 $\boxed{\text{Ex 1}}$

① $f(x,y) = e^{x\ln(x^2+y^2)} = 1 \Leftrightarrow x\ln(x^2+y^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2+y^2 = 1$



$S = (Oy) \cup \mathcal{C}(0,1)$

② $f(x,0) = e^{2x\ln x} < 1$ au voisinage de 0^+, > 1 au voisinage de 0^-

③ f est de C^2 sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$.

(par composée de $(x,y) \longrightarrow x^2+y^2$, C^2 sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$,

et de $t \longmapsto \ln t$, C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$:

$(x,y) \longmapsto \ln(x^2+y^2)$ est C^2 sur Ω.), ...)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right) e^{x\ln(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy}{x^2+y^2} e^{x\ln(x^2+y^2)}$$

(x,y) point critique de $f \Leftrightarrow Df(x,y) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2\ln|y| = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ 2\ln|x| + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{(x,y) = (0,\pm 1) \text{ ou } (x,y) = \left(\pm\frac{1}{e}, 0\right)}$$

④ • $Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \operatorname{tr} H = 0 \\ \det H = -4 \end{cases}$ $\operatorname{Sp} H = \{-2;2\}$ Pas d'extremum local en $(0,1)$ (point-selle)

$Hf\left(\frac{1}{e}, 0\right) = (\ldots)$ $\begin{pmatrix} 2e^{-2/e+1} & 0 \\ 0 & 2e^{-2/e+1} \end{pmatrix}$ $\operatorname{tr} H > 0$, $\det H > 0$ Minimum local en $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$

• $f(x,-y) = f(x,y)$ $\mathcal{C}_f$ est sym. par rapport au plan (xOz) : $(y=0)$ Pas d'extremum local en $(0,-1)$

• $f(-x,y) = \dfrac{1}{f(x,y)}$ Par symétrie : Max. local en $\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$

• Pour $x \geq 0$:

$\forall y \in \mathbb{R}$, $f(x,y) \geq f(x,0) = e^{2x\ln x} \geq f(\frac{1}{e},0)$

(Tableau de variations de $g : x \mapsto x\ln x$

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & & \frac{1}{e} & & +\infty \\ \hline g(x) & 0 & \searrow & -\frac{1}{e} & \nearrow & \end{array}$$
)

De plus : $\forall y \in \mathbb{R}$, $f(0,y) = 1 \geq f(\frac{1}{e},0) = e^{-\frac{2}{e}}$

$\boxed{\text{Min global en } (\frac{1}{e},0) \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}}$

• Pour $x > 0$:

$f(-x,0) = \frac{1}{f(x,0)} = e^{-2x\ln(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 < f(\frac{1}{e},0)$

$\boxed{\text{Pas de min. global en } (\frac{1}{e},0) \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$

• Par symétrie :

$\boxed{\text{Max global en } (-\frac{1}{e},0) \text{ sur } \mathbb{R}_- \times \mathbb{R} \text{ mais pas sur } \mathbb{R}^2}$

$\boxed{\text{Ex 2}}$ cf TD 1 : CN : $X + X^T = tr(X)A \Rightarrow 2tr(X) = tr(X) \times tr(A) \Rightarrow trX = 0$ ou $trA = 2$

CN : $X + X^T = tr(X)A \Rightarrow \begin{cases} tr(X) = 0 \\ X \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \end{cases}$ ou $\begin{cases} tr(X) \neq 0 \\ A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ X = \lambda A + Y \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R},\ Y \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \end{cases}$

(en effet : $X = \underbrace{\frac{X+X^T}{2}}_{\in \mathcal{S}_n} + \underbrace{\frac{X-X^T}{2}}_{\in \mathcal{A}_n}$)

$\Rightarrow X \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ ou $\begin{cases} A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ X \in vect(A) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}). \\ trA = 2 \end{cases}$

CS : 1er cas : $A \notin \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ou $trA \neq 2$:

$\mathcal{S} = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

2ème cas : $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $trA = 2$

$\mathcal{S} = vect(A) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Ex 19 $\boxed{\text{Ex 1}}$

$\boxed{14}$ $(A \text{ gagne}) = P_1 \cap P_2$, $\mathbb{P}(A \text{ gagne}) = \frac{1}{4}$

2,5

① $H_d(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} \underbrace{\operatorname{tr}}_{\in \mathcal{L}(\mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \mathbb{R}) \setminus \{0\}}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

$I_d \notin H_d(\mathbb{R})$, donc (...) $H_d(\mathbb{R}) \oplus \operatorname{vect}(I_d) = \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$

---

② $\forall M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $\quad r(IM - MI) = r(0) = 0 = r(I)M - Mr(I)$

$r(I)M = Mr(I)$

$\forall i, j$, $\quad E_{ij}\, r(I) = r(I)\, E_{ij}$

(...) $\quad r(I) \in \operatorname{vect}(I)$

$r(\operatorname{vect}(I)) = \operatorname{vect}(r(I)) \subset \operatorname{vect}(I)$.

---

③ Pour $i \in [\![1,n]\!]$: $\forall j$, $r(E_{ii}E_{jj} - E_{jj}E_{ii}) = r(E_{ii})E_{jj} - E_{jj}\, r(E_{ii})$

$= r(0) = 0$

$\forall j$, $\quad r(E_{ii})E_{jj} = E_{jj}\, r(E_{ii})$

$\forall j, \forall k \neq j \quad [r(E_{ii})]_{j,k} = 0$

$r(E_{ii}) \in D_d(\mathbb{R})$

$r(D_d(\mathbb{R})) = \operatorname{vect}(r(E_{ii}))_{1 \leq i \leq n} \subset D_d(\mathbb{R})$

---

④ ⊛ Disposons de $A \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$. $AB - BA \notin S_d^{++}(\mathbb{R})$
disposant de n valeurs propres $(\operatorname{tr}(AB-BA) = 0)$
réelles distinctes.

Les n valeurs propres de A ne sont pas toutes valeurs propres de $AB - BA$?

⊛ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(AB - BA) = \emptyset \neq \operatorname{Sp}(A)$

$\boxed{\text{Ex 2}}$ Posons $\alpha = \inf\{J(u),\ u \in E\}$, $E = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}),\ u(0) = 0,\ u(1) = 1\}$

$\alpha \geq 0$

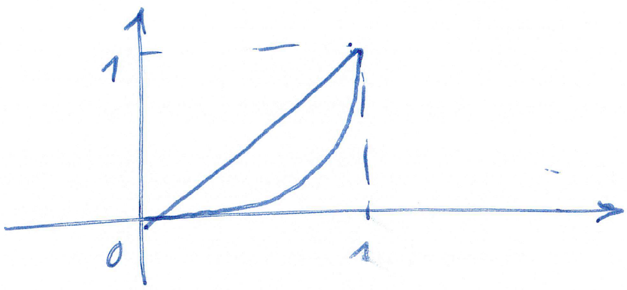
(*) Cauchy-Schwarz → $\int_0^1 u'^2 \geq \left[\int_0^1 u'\right]^2 = 1$

donc $\{J(u), u \in E\}$ est minoré par 1

$\alpha \geq 1$

(*) Fonctions puissances ? Posons $f_a : x \mapsto x^a$, avec $a \geq 1$ (pour la dérivabilité en 0)

$J(f_a) = \frac{1}{2a+1} + \frac{a^2}{2a-1} \xrightarrow[a \to +\infty]{} +\infty$



$\left(J(f_a) \geq J(f_1) = \frac{4}{3}\right)$

(*) Pour $u_0 \in E$ tq $u_0 + h \in E$ $\left(\overbrace{h \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \text{ et } h(0) = h(1) = 0}^{\text{ensemble } E'}\right)$

$J(u_0 + h) = J(u_0) + J(h) + 2\int_0^1 uh + u'h'$

On cherche $u_0 \in E$ telle que : $\forall h \in E', J(u_0 + h) \geq J(u_0)$. (1)

(*) Disposons de $h_0 \in E'$ et posons $h = \varepsilon h_0$, avec $\varepsilon > 0$

On cherche $u_0 \in E$ telle que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $J(u_0 + \varepsilon h_0) \geq J(u_0)$ (2)

$J(u_0 + \varepsilon h_0) - J(u_0) = \varepsilon^2 \underbrace{J(h_0)}_{>0} + 2\varepsilon \int_0^1 (uh_0 + u'h_0')$

(2) est vérifiée ssi $\int_0^1 uh_0 + u'h_0' = 0$

(*) Prenons $u_0 \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}) \cap E$. $(1) \Leftrightarrow (3)$

en posant (3) : $\forall h_0 \in E'$, $\int_0^1 u_0 h_0 + u_0' h_0' = 0$

$$(\text{IPP} \rightarrow) \quad \int_0^1 u_0 h_0 + \underbrace{\left[u_0' h_0\right]_0^1}_{0} - \int_0^1 u_0'' h_0 = 0$$

$$(3) \Leftrightarrow \forall h_0 \in E', \quad \int_0^1 (u_0 - u_0'') h_0 = 0$$

$u_0 = u_0''$ est suffisant

(*) (...) Posons $u_0 : x \longmapsto \frac{e}{e^2-1}(e^x - e^{-x})$

$u_0 \in E$ et $u_0 = u_0''$.

On a bien : $\forall h_0 \in E', \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \ J(u_0 + \varepsilon h_0) - J(u_0) = \varepsilon^2 J(h_0) \geq 0$

$$J(u_0) = \min\{J(u), u \in E\}$$
$$= \frac{e^2+1}{e^2-1}.$$