① $M \notin GL_n(\mathbb{R}) \iff \det M = (-1)^X - (-1)^Y = 0$

$\iff X$ et Y de même parité.

$$\mathbb{P}(M \notin GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{P}\big((X \text{ pair}) \cap (Y \text{ pair})\big) + \mathbb{P}\big((X \text{ impair}) \cap (Y \text{ impair})\big)$$

$= p^2 + (1-p)^2$ (union incompatible, $X \perp\!\!\!\perp Y$)

en posant $= 1 + 2p^2 - 2p$

$$p = \mathbb{P}(X \in 2\mathbb{N}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = \underline{ch(\lambda) \times e^{-\lambda}}$$

$1 - p = e^{-\lambda}(e^{\lambda} - ch(\lambda)) = \underline{e^{-\lambda} sh(\lambda)}$.

$\mathbb{P}(M \in GL_n(\mathbb{R})) = 2p - 2p^2 = 2p(1-p) = \underline{2e^{-2\lambda} ch(\lambda) sh(\lambda)} \left(= 2 sh(2\lambda)\right)$

---

② $\chi_M = X^2 - aX + b$, en posant $a = (-1)^X + 1$ $(= \mathrm{tr}\, M)$

$b = (-1)^X - (-1)^Y$ $(= \det M)$

__1er cas :__ $a = b = 0$ (X et Y impaires). M n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$ (ni donc sur $\mathbb{R}$)

$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (sinon on aurait $M \underset{s}{\sim} 0$ donc $M = 0$)

__2ème cas :__ $b = 0$ et $a = 2$. (X et Y paires) (χ_M est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$)

M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (donc sur $\mathbb{C}$)

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

__3ème cas :__ $b = 2$, $a = 2$ (X pair, Y impaire).

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est diago^a sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$ ($\chi_M = X^2 - 2X + 2$ a 2 racines distinctes complexes non réelles)

__4ème cas :__ $b = -2$, $a = 0$ (X impair, Y paire)

$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est diago^a sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$ ($\chi_M = X^2 - 2$)

$\mathbb{P}(M \text{ diago}^a \text{ sur } \mathbb{R}) = \mathbb{P}(X \text{ et } Y \text{ pairs}) = p^2 = \underline{e^{-2\lambda} ch^2(\lambda)}$

$\mathbb{P}(M \text{ diago}^a \text{ sur } \mathbb{C}) = 1 - \mathbb{P}(X \text{ et } Y \text{ impaires}) = 1 - (1-p)^2 = 2p - p^2 = \underline{e^{-\lambda} ch(\lambda)\left(2 - e^{-\lambda} ch(\lambda)\right)}$