1237. PYTHON. Soient a un réel, $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et (L) l'équation différentielle $f' + af = g$.

a) Résoudre (L).

b) Écrire la fonction `f(g, a, b, x)` donnant la valeur en x de la solution f de (L) valant b en zéro.

c) On suppose que f est T-périodique avec $T > 0$. La fonction g est-elle T-périodique ?

d) Soit $g\colon x \mapsto \sin(x)$. On choisit $a = 1$ et un b arbitraire. Tracer le graphe de f.

Tracer ensuite le graphe de f pour $b = (e^{2\pi a} - 1)^{-1} \displaystyle\int_0^{2\pi} g(t)\, e^{at}\, dt$. Qu'en déduit-on ?

e) On suppose maintenant que g est T-périodique avec $T > 0$.
Montrer que f est T-périodique si et seulement si $f(0) = f(T)$.

1238. Soient $\omega \in \mathbb{R}^*$ et (E) l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$: $xy'' + 2y' + \omega^2 xy = 0$.

a) Déterminer les solutions de (E) qui sont somme d'une série entière.

b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

1247. PYTHON . Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = x^3 - 3x\,(1 + y^2)$.

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer son gradient.

b) Tracer les lignes de niveau $f(x, y) = h$ pour $(x, y) \in [-2, 2]^2$ et $h \in [\![-3, 3]\!]$. Énoncer une conjecture sur les points critiques de f.

c) Démontrer la conjoncture en déterminant les points critiques.

d) Tracer le graphe de $g : x \mapsto f(1 + x, x)$. Quelle conjecture peut-on faire sur un des points critiques de f ?

e) Soit (e_1, e_2) une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$. On introduit s, la symétrie orthogonale par rapport à $\mathbb{R}e_2$. Exprimer $f(s(a))$ à l'aide de $f(a)$. En déduire une propriété sur l'autre point critique de f.

f) On pose $\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Montrer que f admet des extrémums sur $\mathcal{B}$ et qu'ils sont atteints sur la frontière de $\mathcal{B}$.

1270. PYTHON. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que $\mathbb{P}\,(X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = -1) = \dfrac{1}{2}$. On pose $S_n = X_0 + \cdots + X_n$.

a) Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires. On suppose que X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, que $Y \leqslant X$ et que X est d'espérance finie. Montrer que Y est d'espérance finie.
Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a < b$. On pose $T = \min\{n \in \mathbb{N},\ S_n \notin [-a, b]\}$, si cet ensemble est non vide, $T = +\infty$ sinon. On dit que T est le temps de sortie de $[a, b]$.

b) i) Écrire, en PYTHON , une fonction `temps (a, b)` qui renvoie le temps de sortie T. Tester avec $a = 5$ et $b = 7$.

ii) Écrire, en PYTHON , une fonction `moyenne (a, b)` qui renvoie la moyenne de T sur un nombre de 10 000 expériences. Tester avec $a = 5$ et $b = 7$. Que peut-on conjecturer ?

c) On pose $\ell = b - a + 1$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = \displaystyle\bigcap_{k=n\ell+1}^{(n+1)\ell} (X_k = 1)$. Montrer que les événements G_n pour $0 \leqslant n \leqslant N$ sont indépendants, de même probabilité. Donner leur probabilité commune.

d) Montrer que $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$.