Ex 40

99

$\boxed{\text{Ex1}}$

1 Posons $g : x \longmapsto e^{ax} f$

$g' : x \longmapsto e^{ax}(f' + af)$. Or $g(0) = g(1) = 0$

Theo de Rolle $\longrightarrow$ $\therefore g'$ s'annule sur $[0,1]$

$\boxed{\text{Ex2}}$ $\mathbb{E}(T_{n+1}) = \mathbb{E}(T_n) + c + \mathrm{Im}\left(\mathbb{E}\left(e^{i2\pi(T_n - \varphi_n)}\right)\right)$

$$= \mathbb{E}(T_n) + c + \mathrm{Im}\left(\mathbb{E}\left(e^{i2\pi T_n}\right) \times \mathbb{E}\left(e^{-i2\pi \varphi_n}\right)\right)$$

Lemme des coalitions

et, par récurrence : $T_n = f(\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1})$

Theo du transfert $\longrightarrow$ $\mathbb{E}\left(e^{-2i\pi\varphi_n}\right) = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{e^{-2i\pi\frac{k}{q}}}{q} = \frac{1 - e^{-2i\pi}}{q} = 0$

$\mathbb{E}(T_{n+1}) = \mathbb{E}(T_n) + c$

$\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{E}(T_0) + cn = nc.$

Ex 37

Prenons $A \in G$. $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $\det(M) = 1$. On dispose de $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_2$

$\chi_A(X) = (X - \underbrace{\lambda_1}_{\in \mathbb{C}})(X - \underbrace{\lambda_2}_{\in \mathbb{C}}) = X^2 - \text{tr}A . X + 1$.

$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}A \in \mathbb{Z} \\ \lambda_1 \lambda_2 = 1. \end{cases}$

$\lambda_1 = r e^{i\alpha}$, avec $r > 0$, $\alpha \in]-\pi, \pi]$, $\lambda_2 = \frac{1}{r} e^{-i\alpha}$

$\lambda_1 + \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ donc $\text{Im}(z_1 + z_2) = 0 = r \sin\alpha - \frac{1}{r}\sin\alpha$

$r = 1$ ou $\sin\alpha = 0$.

$A^p = I_2$
donc $\lambda_1^p = \lambda_2^p = 1$,
$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$.

$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\cos\alpha \in \mathbb{Z}$.

$\cos\alpha \in \{-1 ; -\frac{1}{2} ; 0 ; \frac{1}{2} ; 1\}$

Cas 1 : $\cos\alpha = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

Cas 2 : $\cos\alpha = -1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

Cas 3 : $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \{\lambda_1 ; \lambda_2\} = \{i ; -i\}$

Cas 4 : $\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \{\lambda_1 ; \lambda_2\} = \{-j^2 ; -j\}$

Cas 5 : $\cos\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \{\lambda_1 ; \lambda_2\} = \{j ; j^2\}$

A est diagonalisable ($X^n - 1$ est annulateur à racines simples)

A est semblable à $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = D$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = I_2 \Leftrightarrow D^k = I_2$

Cas 1 $\rightarrow$ ord(A) = 1 $(A = I_2)$

Cas 2 $\rightarrow$ ord(A) = 2 $(A = -I_2)$

Cas 3 $\rightarrow$ ord(A) = 4

Cas 4 $\rightarrow$ ord(A) = 6

Cas 5 $\rightarrow$ ord(A) = 3

② • Supposons $\mathrm{ord}(A) = \mathrm{ord}(B) < +\infty$, avec $(A, B) \in G^2$. $\boxed{\text{1er essai}}$ 31

A et B sont semblables à $D \in \mathcal{D}_2(\mathbb{C})$, donc $P^{-1}AP = B$, avec $P \in GL_2(\mathbb{C})$

Or $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Posons $X = \mathrm{Re}(P)$
$Y = \mathrm{Im}(P)$

On dispose de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\det(X + \lambda Y) \neq 0$ ($\lambda \mapsto \det(X + \lambda Y) \in \mathbb{C}[X]$ et est non nulle en i, donc a un nb. fini de racines dans $\mathbb{C}$)

$AP = BP$

$AX = XB$ donc $A(X + \lambda Y) = \underbrace{(X + \lambda Y)}_{\in GL_2(\mathbb{R})} B$

$AY = XY$

A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$Q^{-1}AQ = B$, avec $Q \in GL_2(\mathbb{R})$

Posons $Q_1 = \dfrac{Q}{\det Q}$, $\det Q_1 = 1$ et $Q_1^{-1} A Q_1 = B$

On ne peut pas toujours choisir $Q \in GL_2(\mathbb{Z})$

$\boxed{\text{2ème essai}}$

$\textcircled{\scriptsize !}$) • Disposons de $C \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{2,1}\}$ tel que $AC = \lambda_1 C$

Posons $p = \text{ord}(A)$, $X = \text{Re}(C)$, $Y = \text{Im}(C)$

$A^p C = \lambda_1^p C = C$

$\begin{cases} A^p X = X \\ A^p Y = Y \end{cases}$, et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, donc $\underline{(X, Y) \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Q})^2}$.

• $\underline{\text{Cas 3 à 5}}$: $\underline{(X, Y) \text{ est libre}}$.

En effet : $Y = 0 \Rightarrow AX = \lambda_1 X \Rightarrow \lambda_1 \in \mathbb{R}$

$X = \alpha Y \Rightarrow AY = \lambda_1 Y \Rightarrow \lambda_1 \in \mathbb{R}$ Absurde.

Posons $P = (X \mid Y) \in GL_2(\mathbb{Q})$.

$AX = \text{Re}(\lambda_1 C) = \text{Re}(\lambda_1) X - \text{Im}(\lambda_1) Y$

$AY = \text{Im}(\lambda_1 C) = \text{Im}(\lambda_1) X + \text{Re}(\lambda_1) Y$

donc $P^{-1}AP = U = \begin{pmatrix} \text{Re}(\lambda_1) & \text{Im}(\lambda_1) \\ -\text{Im}(\lambda_1) & \text{Re}(\lambda_1) \end{pmatrix}$

Prenons $B \in G$ telle que $\text{ord}(B) = \text{ord}(A)$.

D'après la Q1 : $Sp_{\mathbb{C}}(B) = Sp_{\mathbb{C}}(A)$,

donc on dispose de $R \in GL_2(\mathbb{Q})$ telle que $R^{-1}BR = U$

$RP^{-1}\underbrace{APR^{-1}}_{\in GL_2(\mathbb{Q})} = B$

• $\underline{\text{Cas 1, 2}}$ $A = \pm I_2 = B$. $P = I_2$ convient.

Ex 41 d'alembert $\longrightarrow$ $a_n = \dfrac{\lambda^{qn}}{(qn)!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lambda^q}{(qn+n)\cdots(qn+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$ $\boxed{f_q \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

SE de ray. ou $+\infty$ $\to$ $\boxed{f_q \text{ est } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$

$$f_q'(\lambda) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{qn-1}}{(qn-1)!}$$

$$f_q''(\lambda) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{qn-2}}{(qn-2)!}$$

$\vdots$

$$f_{q-1}^{(q-1)}(\lambda) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{qn-(q-1)}}{(qn-(q-1))!}$$

$$\sum_{k=0}^{q-1} f_q^{(k)}(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^\lambda$$

f_q est solution de $\underset{(E)}{y + \cdots + y^{(q-1)} = e^x}$, $f_q(0) = 1$, $f_q'(0) = \cdots f_{q-1}'(0) = 0$.

$x \longmapsto \dfrac{e^x}{q}$ est solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.

L'équa. caractéristique de (E_0) : $y + \cdots + y^{(q-1)} = 0$
est $1 + X + \cdots + X^{q-1} = 0 = \dfrac{1-X^q}{1-X}$

Racines $\left(e^{ik\frac{2\pi}{q}}\right)_{1\leq k\leq q-1}$.

Has- Programme $\longrightarrow$ $S_0 = \text{vect}\left(x \longmapsto e^{ik\frac{2\pi}{k}x}\right)_{1\leq k\leq q-1}$

$f_q(x) = \dfrac{e^x}{q} + \displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} \lambda_k e^{ik\frac{2\pi}{k}x}$ avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{q-1}) \in \mathbb{C}^{q-1}$!

$$f_q(x) \times e^{-x} = \frac{1}{q} + \sum_{k=1}^{q-1} \lambda_k \underbrace{e^{ik\frac{2\pi}{k}x} \times e^{-x}}_{g_k(x)}$$

$|g_k(x)| = e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ $\quad g_k(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ $\quad \boxed{f_q(x) e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$

$q = 1 \to f_1(x) = e^x$.

$q = 2 \longrightarrow f_2(x) = \text{ch}(x)$

$q = 3 \longrightarrow f_3(x) = \dfrac{e^x}{3} + \dfrac{2}{3} e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

$q = 4 \longrightarrow f_4(x) = \dfrac{e^x}{4} + \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{e^{-x}}{4}$.

Ex 56. <u>Cas particulier</u> : Supposons $k=1$. $\|f_n'\|_\infty \leqslant C$.

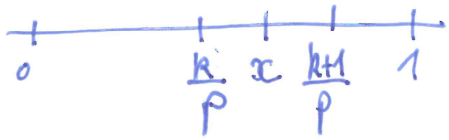
Théo. des AF $\rightarrow$ $\forall (x,y) \in [0,1]$, $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant C|x-y|$.

Quand $n \to +\infty$ $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|$ f est C-lipschitzienne.

Montrons $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

<u>Prenons $\varepsilon > 0$.</u> Pour $p \in \mathbb{N}^*$ on pose, pour $k \in [\![0,p]\!]$: $x_k = \frac{k}{p}$.

(subdivision de $[0,1]$ de pas $\frac{k}{p}$)



<u>Pour $k \in [\![0,p]\!]$:</u> $f_n(x_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_k)$

<u>$\exists N \in \mathbb{N}$,</u> $\forall k \in [\![0,p]\!]$ $\forall n \geqslant N$ $|f_n(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon$

<u>Pour $n \geqslant N$, $x \in [0,1]$:</u> $\exists\, k \in [\![0,p]\!]$, $x \in [x_k, x_{k+1}]$

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)|$$

$$\leqslant 2C \underbrace{|x - x_k|}_{\leqslant \frac{1}{p}} + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon \text{ . pour } \frac{1}{p} \leqslant \frac{\varepsilon}{2C}$$

$\|f_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$

On a montré $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

- <u>Cas général</u> : $\|f_n^{(k)}\| \leqslant C_k$

donc $|f_n^{(k-1)}(x) - f_n^{(k-1)}(0)| \leqslant C_k x \leqslant C_k$

$\|f_n^{(k-1)}\| \leqslant C + |f_n^{(k-1)}(0)| = C_{k-1}$

Par récurrence élémentaire : $\|f_n'\| \leqslant C_1$ et, d'après le cas particulier, (f_n) CU vers f.