Ex 36 Posons : $\mathcal{S}$ l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]^2$.

Posons $\varphi : \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow K$

$$(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \longmapsto \prod_{\sigma\in\mathcal{S}} \det A_\sigma, \text{ en posant } A_\sigma = \left(a_{\sigma(i,j)}\right)_{1\le i,j\le n}$$

φ est une f° polynomiale (à n^2 indéterminées)

des coefficients de φ ne sont pas tous nuls,

donc φ n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{R}^{n^2}$.

donc on dispose de $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $\varphi(A)\ne 0$

$\forall \sigma\in\mathcal{S}, \det A_\sigma \ne 0$

$\forall \sigma\in\mathcal{S} \quad A_\sigma \in GL_n(K)$

Rem : on utilise les résultats suivants sur les polynômes à plusieurs indéterminées :

(1) Un produit de polynômes non nuls est non nul.

(2) Pour $P\in K[X_1,\dots,X_n]$,

$(\forall (x_1 \dots x_n)\in K^n, P(x_1 \dots x_n)=0) \Rightarrow P = 0_{K[X_1,\dots,X_n]}$.

(Si la f° polynomiale est nulle, alors le polynôme est nul (tous ses coefficients sont nuls !

Rem : $P\in K[X_1,\dots X_n]$ non nul peut avoir par contre 1 infinité de racines.

Exemple : Posons $P = X - Y \in \mathbb{R}[X,Y]$

$P(x,y)=0 \Leftrightarrow y = x$.