Ex 20 1er cas : $X=0$: $A = I_3 \underset{s}{\cancel{\sim}} B$

[Ex 1] (A gagne) $= P_1 \cap P_2$
$P(A \text{ gagne}) = \frac{1}{4}$.

16

• 2ème cas : $X \neq 0$

On pose (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On a $\begin{cases} Ae_1 = e_1 \\ Ae_2 = Xe_1 + e_2 \\ Ae_3 = 2Xe_1 + Xe_2 + e_3 \end{cases}$ vect(e_1), vect(e_1, e_2) sont stables par A

On cherche (e'_1, e'_2, e'_3) tq $\begin{cases} Ae'_1 = e'_1 + e'_2 + e'_3 & (1) \\ Ae'_2 = e'_2 + e'_3 & (2) \\ Ae'_3 = e'_3. & (3) \end{cases}$

vect(e'_3) est stable par A donc vect$(e'_3) =$ vect(e_1). (seule droite stable)

On pose $e'_3 = e_1$
(3) est vraie

vect$(e'_2, e'_3) =$ vect(e'_2, e_1) est stable par A donc vect$(e'_2, e'_3) =$ vect(e_1, e_2).
(seul plan stable par A) ~~contenant~~

On pose $e'_2 = ae_1 + be_2$

$Ae'_2 = ae_1 + b(Xe_1 + e_2) = (a+bX)e_1 + be_2$ | $e'_2 + e'_3 = ae_1 + be_2 + e_1 = (a+1)e_1 + be_2$

(2) $\Leftrightarrow$ $a + bX = a+1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{X}$ $e'_2 = ae_1 + \frac{1}{X}e_2$

On pose $e'_1 = ce_1 + de_2 + fe_3$

$Ae'_1 = ce_1 + d(Xe_1 + e_2) + f(2Xe_1 + Xe_2 + e_3) = (c + dX + 2fX)e_1 + (d + fX)e_2 + fe_3$

$e'_1 + e'_2 + e'_3 = e_1 + ae_1 + \frac{1}{X}e_2 + ce_1 + de_2 + fe_3 = (1+a+c)e_1 + (\frac{1}{X} + d)e_2 + fe_3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} dX + 2fX = 1+a \\ fX = \frac{1}{X} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f = \frac{1}{X^2} \\ dX + \frac{2}{X} = 1+a. \end{cases}$ $\begin{cases} a = c = 0 \text{ conviennent} \\ d = \frac{1}{X} - \frac{2}{X^2} \end{cases}$

sous $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{X} - \frac{2}{X^2} & \frac{1}{X} & 0 \\ \frac{1}{X^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$. $P^{-1}AP = B$ $A \underset{s}{\sim} B$.

Exercice 3 : Posons (v_n) définie par $\begin{cases} v_N = u_N, \ v_{N+1} = u_{N+1} \\ \forall n, \ v_{n+1} = 2v_n + v_{n-1}. \end{cases}$

Pour $N \in \mathbb{Z}$:

Par récurrence double : $\forall n \geq N, \ u_n \geq v_n$ $\quad (u_{n+1} \geq 2u_n + u_{n-1})$

$X^2 - 2X - 1 = 0$ a pour racines $\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} = 1 \pm \sqrt{2}$.

$v_n = \alpha(1-\sqrt{2})^{n-N} + \beta\underbrace{(1+\sqrt{2})}_{>1}^{n}$ avec $\begin{cases} \alpha + \beta = u_N \\ \alpha(1-\sqrt{2}) + \beta(1+\sqrt{2}) = u_{N+1}. \end{cases}$ $\begin{cases} \beta + \alpha = u_N \\ \beta - \alpha = \dfrac{u_{N+1} - u_N}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée donc $\beta = 0 = \alpha$.

$v_N = \alpha = u_N$ $\qquad u_N(1-\sqrt{2}) = u_{N+1}$.

$v_{N+1} = \alpha(1-\sqrt{2}) = u_{N+1}$.

On a montré : $\forall N \in \mathbb{Z}, \ u_{N+1} = (1-\sqrt{2})u_N$

donc : $\forall n \in \mathbb{Z}, \ u_n = \underbrace{(1-\sqrt{2})}_{\in]0,1[}^{n} u_0$. Or $|1-\sqrt{2}|^n \xrightarrow[n \to -\infty]{} +\infty$

$(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée donc $u_0 = 0$. $\underline{(u_n) = (0)}$

Ex 21 Ex 1 ① • $\mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}(f\circ g)$

$x \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} g \Rightarrow f(g(x)) = f(x) = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(f\circ g)$

donc $\mathrm{Ker}\, g + (\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im}\, g) \subset \mathrm{Ker}(f\circ g)$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f\circ g)$. $x = g(x) + z$, avec $z \in \mathrm{Ker}\, g$

$g(x) \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im}\, g$, donc $x \in \mathrm{Ker}\, g + \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im}\, g$

$\mathrm{Ker}\, g \cap (\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im}\, g) \subset \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im}\, g = \{0\}$ La somme est directe.

②• $\mathrm{Im}(f\circ g) \subset \mathrm{Im} f$.

$x \in \mathrm{Im}(f\circ g) \Rightarrow x = f\circ g(x')$

$= g(x') + \underbrace{f\circ g(x') - g(x')}_{\in \mathrm{Ker} f} \in \mathrm{Im}\, g + \mathrm{Ker} f$

donc $\mathrm{Im}(f\circ g) \subset \mathrm{Im} f \cap (\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im}\, g)$

$x \in \mathrm{Im} f \cap (\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im}\, g) \Rightarrow x = \underset{\in \mathrm{Ker} f}{y} + \underset{\in \mathrm{Im}\, g}{z}$ et $f(x) = f(z) = x$

donc $x \in \mathrm{Im}(f\circ g)$

Ex 2 • Supposons que Σu_n converge. $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$

$$V_{n+1} - V_1 = \sum_{k=0}^{n} (V_{k+1} - V_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (S_k - S_{k-1}) V_{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} S_k V_{k-1} - \sum_{k=0}^{n-1} S_k V_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \underbrace{(V_{k-1} - V_k)}_{\leq 0} + S_n V_{n-1} - S_0 V_0.$$

Pour $\varepsilon > 0$: $\exists N,\ \forall n \geq N_0,\ S - \varepsilon \leq S_n \leq S + \varepsilon$.

$$V_{n+1} - V_1 \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} S_k (V_{k-1} - V_k) + S_n V_{n-1} \leq -\sum_{k=n_0}^{n-1} (S-\varepsilon)(V_k - V_{k-1}) + (S+\varepsilon) V_{n-1}$$

$$= (\varepsilon - S)(V_{n-1} - V_{n_0 - 1}) + (S+\varepsilon) V_{n-1}$$

$$= 2\varepsilon V_{n-1} + (\varepsilon - S) V_{n_0 - 1} \leq 2\varepsilon V_{n+1} + (\varepsilon - S) V_{n_0 - 1}$$

(V_{n+1}) est majorée et ↑, donc converge

$\boxed{\text{Ex 1}}$ ① $f\circ f(x) - 1 = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{f(x)}\right)$

$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

donc $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{2}$ donc

$0 < \frac{2}{3} \leq \frac{1}{f(x)} \leq 2 < \pi$

$\sin\left(\frac{1}{f(x)}\right) > 0$ donc $f\circ f(x) > 1$

---

② $x \mapsto f(x) - x$ est C^0 et $(\dots)$ st $\downarrow$ sur $[1, +\infty[$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = -\infty$, $\quad f(1) - 1 = \frac{1}{2}\sin(1) > 0$.

	1	ℓ	$+\infty$
$f(\ell)-\ell$	>0 $\searrow$ +	0	$-$ $\searrow$ $-\infty$

Th de la bijection $\to \exists!\ \ell \geq 1,\ f(\ell) = \ell$

---

③ • $[1, +\infty[$ est stable par $f(\dots)$ $\Big\}$ donc (u_n) est bien définie et : $\forall n \geq 2$, $u_n \in [1, +\infty[$.

$u_2 = f\circ f(a) > 1$

• $u_n - \ell = f(u_{n-1}) - f(\ell) = (u_{n-1} - \ell)\, f'(c)$ avec $c \in]\ell, u_{n-1}[\subset [1, +\infty[$

$f'(c) = -\frac{1}{2x^2}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc $|f'(c)| \leq \frac{1}{2}$

$|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell|$

$u_n \to \ell$ et $\sum u_n - \ell$ converge

• Rem : f est $\downarrow$ sur $[1, +\infty[$.
$f\circ f$ est $\uparrow$ sur $[1, +\infty[$.
(u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraire et bornées (f) ($1 \leq u_{n+1} = f(u_n) \leq \frac{3}{2}$), donc convergent vers ℓ' tq $f\circ f(\ell') = \ell$.

$\boxed{\text{Ex 2}}$ • Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq : $\forall P \in GL_n(\mathbb{R})$, $PA \in S_n(\mathbb{R})$

$A = I_n A \in S_n(\mathbb{R})$

Posons $D_i = \operatorname{diag}(1, \dots 1, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{-1}, 1 \dots 1)$. (Mat. de dilatation)

$P_i A = \begin{pmatrix} L_1^A \\ \vdots \\ -L_i^A \\ \vdots \\ L_n^A \end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{R})$ $(L_i \leftarrow \lambda L_i)$

$j \neq i$, $[P_i A]_{i,j} = [P_i A]_{j,i}$ donc $-a_{ij} = a_{ji} = a_{ij}$
donc $a_{i,j} = 0$

$A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$

Posons $P_{i,j} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$. (Mat. de transposition, pour $i \neq j$)

$P_{i,j}A = \begin{array}{c|cc} & i & j \\ \hline i & 0 & a_{j,j} \\ j & a_{i,i} & 0 \end{array} \in S_n(\mathbb{R})$ donc $a_{ii} = a_{jj}$ $(L_i \leftrightarrow L_j)$ $\underline{A = \lambda I_n}$

Posons $P = I_n + E_{ij}$ (transvection) $(L_i \leftarrow L_i + L_j)$ $\lambda P \in S_n(\mathbb{R})$ donc $\lambda = 0$, $A = 0$

Ex 23

$\boxed{\text{Ex 1}}$ Cauchy-Schwarz $\to$ $\left|\int_x^y f' \times 1\right| \leq \sqrt{\int_x^y f'^2} \times \sqrt{\int_x^y 1^2}$

$$|f(y) - f(x)| \leq \sqrt{\int_x^y f'^2} \times \sqrt{y - x}$$

Quand $y \to 1^-$: $|f(x)| \leq \sqrt{1-x} \times \underbrace{\sqrt{\int_x^1 f'^2}}_{\underset{x\to 1^-}{\to 0}}$

$$\boxed{f(x) \underset{x \to 1^-}{=} o\left(\sqrt{1-x}\right)}$$

$\boxed{\text{Ex 2}}$ $A^2 = \operatorname{diag}(a_k a_{n-k+1})_{1 \leq k \leq n} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$. Posons $I = \{k \in [\![1,n]\!],\ a_k = 0\}$

1er cas : I n'est pas stable par $k \longmapsto n-k$.
$\operatorname{Ker} A^2 \neq \operatorname{Ker} A$, donc (...) A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

2ème cas : I est stable par $k \longmapsto n-k$
$\operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{Ker} A$, donc (...) A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

$\exists k,\ a_k a_{n-k} < 0 \underset{(\dots)}{\Rightarrow}$ A non diagonalisable dans $\mathbb{R}$

$\forall k,\ a_k a_{n-k} \geq 0 \underset{(\dots)}{\Rightarrow}$ A diagonalisable dans $\mathbb{R}$.