Ex 1 $\varphi_n : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \quad \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$

$P \longmapsto P(X) + P(X+1)$

$\deg(\varphi_n(P)) = \deg(P)$ donc $\operatorname{Ker} \varphi_n = \{0\}$. φ_n est un isomorphisme.

5

$\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \quad \in GL(\mathbb{R}[X])$.

$P \longmapsto P(X) + P(X+1)$

Ex 2

1) (*) Supposons que w est un isomorphisme.

$w = v \circ u$ est injectif, donc u est injectif

$w = v \circ u$ est surjectif donc v est surjectif.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u)$. $x = u(x')$ et $v(x) = w(x') = 0$,
donc $x' = 0$ et $x = 0$

Soit $x \in F$. $v(x) \in G = \mathrm{Im}(w)$,
donc $v(x) = w(x') = v \circ u(x')$

$$x = \underbrace{u(x')}_{\in \mathrm{Im}\, u} + \underbrace{x - u(x')}_{\in \mathrm{Ker}\, v},$$

(*) Supposons u inj, v surj, et $\mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Im}(u) = F$.

- Soit $x \in \mathrm{Ker}(w)$: $v \circ u(x) = 0$
  $u(x) \in \mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v = \{0\}$ donc $u(x) = 0$ donc $x = 0$
  $(u$ inj$)$
- Soit $z \in G$. v est surj. donc $z = v(y)$ avec $y \in F$
  $y = y' + u(x')$ avec $y' \in \mathrm{Ker}\, v$
  donc $z = v \circ u(x') \in \mathrm{Im}\, w$.

Ex 11 • Pour $x \neq 0$: $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$. $\theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \Leftrightarrow$ $x \neq 0$ et $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

• Posons $\alpha = \arctan\left(\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. $\tan^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \neq 0$

Pour $x \neq 0$:

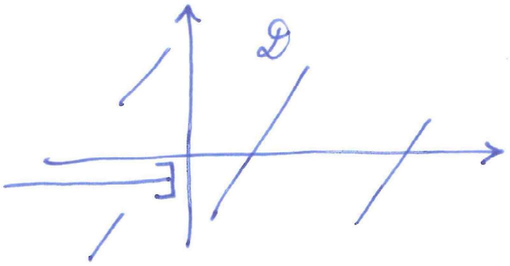
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \times \frac{1}{1-\dfrac{y^2}{(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}} = \frac{2y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \times \frac{(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}{(x+\sqrt{x^2+y^2})^2 - }$$

$$= \frac{2y(x+\sqrt{x^2+y^2})}{2x^2+2x\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x} = \tan\theta.$$

$\left|\begin{array}{l} \theta \in]-\pi, \pi] \\ \theta = 2\alpha\,[\pi]. \end{array}\right.$ $x + \sqrt{x^2+y^2} > 0$

$2\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \tan\alpha \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0 \Leftrightarrow \sin\theta = \dfrac{y}{r} \geq 0 \Leftrightarrow \theta \in [0, \pi] \Leftrightarrow 2\alpha \in [0, \pi$

$2\alpha \in [-\pi, 0] \Leftrightarrow \alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right] \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \theta \in [-\pi, 0]$ $\theta = 2\alpha$



Recherche de CN :

Supposons $f : D \to \mathbb{R}$ C^1 sur D telle que $\forall u \in \mathcal{D},\ \langle u, Df(u)\rangle = \dfrac{1}{\|u\|}$

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D},\quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad (E)$$

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[&\longrightarrow \mathcal{D} \\ (r,\theta) &\longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{aligned}$$ est une bij° C^1.

Posons $F = f\circ\varphi : (r,\theta) \longmapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. F est C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial r} = \cos\theta\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\,\dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial \theta} = -r\sin\theta\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\,\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

$$(E) \iff r\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{r}$$

$$\iff \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{r^2}$$

$$\iff F(r,\theta) = -\frac{1}{r} + A(\theta)$$

$$\iff f(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + A\left(2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right).$$

avec A C^1 sur $]-\pi,\pi[$

Ex 8 ① • IPP :

$$\int_{\pi/2}^{A} \frac{\sin t}{t}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\cos t\right]_{\pi/2}^{A} - \int_{\pi/2}^{A}\left(-\frac{1}{t^2}\right)(-\cos t)\,dt$$

$$= -\frac{\cos A}{A} - \int_{\pi/2}^{A} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$$

$\frac{\cos t}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}$ converge.

$\frac{\cos A}{A} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$ donc $\boxed{\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt \text{ converge}}$

• $\frac{\sin t}{t} \underset{t\to 0}{\sim} 1$ donc $\boxed{\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin t}{t}\,dt \text{ converge}}$

---

② Posons $f(x) = \int_0^{\pi/2} e^{-x\cos t}\cos(x\sin(t))\,dt$. Montrons $f'(x) = -\frac{\sin x}{x}$.
pour $x \neq 0$

$$f(x) = \mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi/2} e^{-x\cos t + ix\sin t}\,dt\right)$$

$$= \mathrm{Re}\Big(\underbrace{\int_0^{\pi/2} e^{-xe^{-it}}\,dt}_{z(x)}\Big)$$

$$z(x) = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n x^n e^{-itn}}{n!}}_{u_n(t)}\,dt$$

$$\int_0^{\pi/2} |u_n(t)|\,dt = \frac{x^n}{n!}\int_0^{\pi/2} 1\,dt = \frac{x^n}{n!}\frac{\pi}{2}. \qquad \sum \int_0^{\pi/2} |u_n| \text{ Converge}$$

thm. d'int. terme à terme :

$$z(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \int_0^{\pi/2} e^{-itn}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \times \frac{i}{n} \times \left[(-i)^n - 1\right]$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \times \frac{1}{2n+1}(-1)^n.$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}(-1)^n.$$

$f'(0) = 1$

Pour $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{1}{x}\sin(x)$

donc $\boxed{f(x) = \underbrace{f(0)}_{\pi/2} + \int_0^x \frac{\sin t}{t}}$

---

(3) $f(t,x) = e^{-x\cos(t)}\cos(x\sin t) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

$|f(t,x)| \leq 1$ pour $x \geq 0$

Theo de CD $\rightarrow$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

donc $\boxed{I = \pi/2}$

Ex 13 1) $x \mapsto x^\alpha$ sdu de (E) $\iff \forall x>0,\ \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1} + \alpha x^\alpha - x^\alpha = 0$

$\iff \forall x>0,\ \alpha(\alpha-1) + (\alpha-1)x = 0$

$\iff \alpha = 1.$

2) $G'(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^2} > 0$, G est strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt > 0$ $\left(\dfrac{e^{-t}}{t^2} = o(e^{-t})\right.$ donc int. en $\left.+\infty\right)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = -\infty$ $\left(\dfrac{e^{-t}}{t^2} \underset{t\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^2}\right.$ non int en 0^+ et positive

$\left.\displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-t}dt}{t^2} \xrightarrow[t\to0^+]{} +\infty\right)$

3) $y = xz.$

Pour $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ 2 fois dérivable : on pose $z : x \mapsto \dfrac{y(x)}{x}$.

$y(x) = xz(x)$

$y'(x) = z(x) + xz'(x)$

$y''(x) = 2z'(x) + xz''(x)$

$xy''(x) + xy'(x) - y(x) = x^2z''(x) + (2x + x^2)z'(x) = 0$

sdu de (E) $\iff z'$ sdu de $xZ' + (2+x)Z = 0$

$\iff z' : x \mapsto \lambda e^{-2\ln x - x} = \lambda\dfrac{e^{-x}}{x^2}$

$\iff z : x \mapsto \lambda G(x) + \mu$

$\iff y : x \mapsto \lambda x G(x) + \mu x$

4) • $y(x) = x(\lambda G(x) + \mu) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$ $\left(\text{du signe de } \lambda \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} + \mu\right)$

$\forall t \in [x, 1]$ $\dfrac{1-t}{t^2} \leq \dfrac{e^{-t}}{t^2} \leq e^{-x}$

Pour $x \in]0,1]$ $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t^2} - \int_x^1 \frac{dt}{t} \leq \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t^2}dt \leq e^{-x}\int_x^1 \frac{dt}{t^2} = e^{-x}\left(\frac{1}{x} - 1\right)$

$= \dfrac{1}{x} - 1 + \ln x$

$e^{-x}(x-1) \leq xG(x) \leq -1 + x - x\ln x$

$\lim\limits_{x\to0^+} xG(x) = -1$

$\lim\limits_{x\to0^+} y(x) = -\lambda.$