Ex 16 • $X_n(\Omega) = [\![-n, n]\!]$, $X_0 = 0$. $\quad$ 1/4

$\forall k \in [\![-n, n]\!]$, $P(X_n = -k) = P(X_n = k)$ (par symétrie...)

$$\forall k \in [\![-n, n]\!], \begin{cases} P(X_{n+1} = k+1 \mid X_n = k) = P(X_{n+1} = k-1 \mid X_n = k) \cancel{=} \frac{1}{2} \\ \forall j \notin \{k-1; k+1\},\ P(X_{n+1} = j \mid X_n = k) = 0. \end{cases}$$

• $$E(X_{n+1}) = \sum_{k=-n-1}^{n+1} k\,P(X_{n+1} = k)$$

$$= \sum_{k=-n-1}^{n+1} k \left(\frac{1}{2} P(X_n = k-1) + \frac{1}{2} P(X_n = k+1)\right)$$

$k' = k-1 \qquad\qquad k' = k+1$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=\cancel{-n-2}\ -n}^{n} (k+1) P(X_n = k) + \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{\cancel{n+2}\ n} P(X_n = k) \times (k-1)$$

$$= \frac{1}{2}\left(E(X_n) + 1\right) + \frac{1}{2}\left(E(X_n) - 1\right) = \boxed{E(X_n) = E(X_0) = 0}$$

• $$E(X_{n+1}^2) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} (k+1)^2 P(X_n = k) + \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} (k-1)^2 P(X_n = k)$$

$$= \frac{1}{2}\left(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1\right) + \frac{1}{2}\left(E(X_n^2) - 2E(X_n) + 1\right)$$

$$= E(X_n^2) + 1$$

$$E(X_n^2) = \boxed{E(X_0^2) + n = n}$$

$$V(X_n) = \boxed{n - 0^2 = n}$$

Ex 3] ① $\operatorname{rg} A = 1 \Rightarrow \chi_A = X^{n-1}(X - \operatorname{tr} A)$ $\cancel{7}$

$\left(\begin{array}{l} A \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow \operatorname{tr} A \neq 0 \\ A^2 = (\operatorname{tr} A) A \end{array}\right)$ $\left(\operatorname{rg} A = 1 \Leftrightarrow A = XY^T, \text{ avec } (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}^2\right)$

---

② $$\det(A + XX^T) = \det\left(A(I_n + XX^TA^{-1})\right)$$

$$= \det A \times \det(I_n + \underbrace{XX^TA^{-1}}_{})$$

$$\operatorname{rg}(XX^TA^{-1}) = \operatorname{rg}(XX^T) = 1$$

$$= \det A \times \chi_{-XX^TA^{-1}}(1)$$

$$= \det A \times 1^{n-1}\left(1 - \operatorname{tr}(-XX^TA^{-1})\right)$$

$$= \det A \times \left(1 + \operatorname{tr}(X^TA^{-1}X)\right)$$

$$= \det A\,(1 + X^TA^{-1}X)$$

Rem : $\underbrace{X}_{(n,1)}\underbrace{X^TA^{-1}}_{(1,n)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\underbrace{X^TA^{-1}}_{(1,n)}\underbrace{X}_{(n,1)} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Ex 4] ① $\det M(x) = \begin{vmatrix} x & & (j-1) \\ & \ddots & \\ (j) & & x \end{vmatrix}_{n+1}$ $\quad C_1 \leftarrow \sum_{j=1}^{n} C_j$

$$= \left(x + \frac{n(n+1)}{2}\right) \begin{vmatrix} 1 & x & & (j-1) \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & (j) & & \\ 1 & & & x \end{vmatrix}_{n+1}$$ $\quad L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ pour i de n à 2

$$= \left(x + \frac{n(n+1)}{2}\right) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & x-1 & & & \\ \vdots & * & x-2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & * & x-n \end{vmatrix}_{n+1}$$ $\quad (*: 2-x \;\ldots\; n-x)$

$$= \left(x + \frac{n(n+1)}{2}\right) \times \prod_{j=1}^{n} (x-j)$$

(développement par rapport à C_1)

② ⊛ $\chi_M(X) = \det(XI - M) = \begin{vmatrix} X-x & & -(j-1) \\ & \ddots & \\ (j) & & X-x \end{vmatrix}_{n+1}$

$$= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} x-X & & (j-1) \\ & \ddots & \\ (j) & & x-X \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$= (-1)^{n+1} \det M(x-X)$$

$$= (-1)^{n+1} \left(x - X + \frac{n(n+1)}{2}\right) \prod_{j=1}^{n} (x-X-j)$$

$$= \left(X - x - \frac{n(n+1)}{2}\right) \times \prod_{j=1}^{n} (X-x+j)$$

χ_M est scindé à racines simples, dans $\mathbb{R}$

donc M est diagonalisable. (dans $\mathbb{R}$.)

$$Sp_{\mathbb{R}}(M) = Sp_{\mathbb{C}}(M) = \left\{ x + \frac{n(n+1)}{2} ; x-1 ; \dots ; x-n \right\}.$$

$$= x + Sp\, M(0)$$

$$= \{ x + \lambda,\ \lambda \in Sp\, M(0) \}.$$

③ ⊛ Pour $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$M(x) - \lambda I_n = M(x-\lambda) = M(0) - (\lambda - x) I_n$$

$$\operatorname{Ker}(M(x) - \lambda I_n) = \operatorname{Ker} M(x-\lambda) = \operatorname{Ker}(M(0) - (\lambda - x) I_n)$$

Or $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\mu \in Sp(M(0))} \operatorname{Ker}(M(0) - \mu I_n) = \bigoplus_{\mu \in Sp\, M(0)} \operatorname{Ker}(M(x) - (\mu + x) I_n)$

Pour $\mu \in Sp\, M(0)$, disposons de $\mathcal{B}_\lambda$ une base de $\operatorname{Ker}(M(0) - \mu I_n)$
$= \operatorname{Ker}(M(x) - (x+\mu) I_n)$

$\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda \in Sp\, M(0)} \mathcal{B}_\lambda$ est une base de E formée de vecteurs propres de $M(0)$
et de $M(x)$

Posons $P = P_{B_0}^{B}$ $B_0 \longrightarrow$ base cano. de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$P^{-1} M(0) P \in D_n(\mathbb{R})$
et $P^{-1} M(x) P \in D_n(\mathbb{R})$

Ex 12 (1) ⊛ f est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ (car polynômiale en x et y). /10

$\mathbb{R}^2$ est ouvert, donc les extremas éventuels locaux sont des points critiques

⊛ Etude des points critiques de f :

$$Df(x,y)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = x-y \\ y^3 = y-x = -x^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x^3 = 2x \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x,y) = O = (0,0)$

ou $(x,y) = A = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

ou $(x,y) = B = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

⊛ $f(-x,-y) = f(x,y)$

$\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à O

⊛ Etude en O : ▫ $H(x,y) = 4 \times \begin{pmatrix} 3x^2-1 & 1 \\ 1 & 3y^2-1 \end{pmatrix}$. Notons λ_1, λ_2 les valeurs propres de H ($\lambda_1 \leq \lambda_2$)

▫ $H(0) = 4 \times \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -2 \times 4 \\ \lambda_1 \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$-8 = \lambda_1 < \lambda_2 = 0$.

▫ $H(0) \notin S_n^+(\mathbb{R})$. Pas de minimum local en O

(D'ailleurs : $f(x,0) = x^2(x^2-2) < 0$ pour x petit)

▫ $f(x,x) = 2x^4 > 0$ Pas de maximum local en O

⊛ Etude en $A(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$:

▫ $H(A) = H(B) = 4\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 10 \times 4 \\ \lambda_1 \lambda_2 = 4 \times 24 > 0 \end{cases}$$

$0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

▫ $H(A) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc il y a un minimum local en A (et en B).

▫ $-H(A) \notin S_n^{+}(\mathbb{R})$ donc il n'y a pas de maximum local en A (et en B).

⊛ Etude des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$:

- Un extremum global est un extremum local, donc il n'y a pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$.
(D'ailleurs : $f(x,0) = x^4 - 2x^2 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$)

- f admet-elle un minimum global en A (et en B) ? ← Question ? à compléter

⊛ Etude en $A(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$:

▷ $H(A) = H(B) = 4\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 10 \times 4 \\ \lambda_1 \lambda_2 = 4 \times 24 > 0 \end{cases}$$

$0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

▷ $H(A) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc il y a un $\boxed{\text{minimum local en } A \text{ (et en } B)}$.

▷ $-H(A) \notin S_n^{+}(\mathbb{R})$ donc il n'y a $\boxed{\text{pas de maximum local en } A \text{ (et en } B)}$.

⊛ Etude des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$:

- Un extremum global est un extremum local, donc il n'y a pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$.
(D'ailleurs : $f(x,0) = x^4 - 2x^2 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$)

- f admet-elle un minimum global en A (et en B) ? ← Question ? à compléter

② Posons $g = f_{|\overline{B}(0,1)}$

⊛ Si g admet un extremum local en $M \in B(0,1)$,

alors f ______________________,

donc $M = A$ ou B, ce qui est absurde $(A, B \notin B(0,1))$.

g n'a pas d'extremum local (ni global de ce fait) en un point de $B(0,1)$

⊛ $\overline{B}(0,1)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$,

donc g admet un min. et un max. global,

atteints en $M \in S(0,1)$.

⊛ Etude de g sur $S(0,1)$:

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, posons $h(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) = g(\cos\theta, \sin\theta)$

$= \cos^4\theta + \sin^4\theta - 2(\cos\theta - \sin\theta)^2$.

h est π-périodique. $= \cos^4\theta + \sin^4\theta - 2(1 - \sin 2\theta)$

$h'(\theta) = -4\sin\theta\cos^3\theta + 4\cos\theta\sin^3\theta + 4\cos 2\theta$

$= -4\cos\theta\sin\theta\underbrace{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}_{\cos 2\theta} + 4\cos 2\theta$

$= 4\cos 2\theta(1 - \cos\theta\sin\theta)$

$= 4\cos 2\theta\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)}_{>0}$, du signe de $\cos 2\theta$.

$h'(\theta) > 0 \Leftrightarrow \cos 2\theta > 0$

$\Leftrightarrow 2\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] [2\pi]$

$\Leftrightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] [\pi]$

θ	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$h'(\theta)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$h(\theta)$	-1	$\searrow$	$-7/2$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	-1

h admet un min. en $-\frac{\pi}{4}$ de valeur $-\frac{7}{2}$

et un max en $\frac{\pi}{4}$ de valeur $\frac{1}{2}$.

(*) g admet pour minimum $-\frac{7}{2}$ atteint en $\left(\cos -\frac{\pi}{4}, \sin -\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

et pour maximum $\frac{1}{2}$ ——— $\left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

h n'admet aucun autre extremum local,

donc g ——————————— sur $S(0,1)$.

Ex24 ① ⓐ • $u^T(\varphi) \in \mathcal{L}(E,K)$ donc u^T est bien définie

• $u^T(\lambda\varphi + \psi) = \lambda u^T(\varphi) + u^T(\psi)$ donc u^T est linéaire.

ⓑ $(\lambda u + v)^T(\varphi) = \lambda u^T(\varphi) + v^T(\varphi)$

donc $(\lambda u + v)^T = \lambda u^T + v^T$

ⓒ (*) • $\operatorname{Ker} u^T = \{\varphi \in \mathcal{L}(F,K),\ \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker}\varphi\}$
$(\varphi \circ u = 0)$

• u surjective $\Rightarrow$ $\operatorname{Ker} u^T = \{\varphi \in \mathcal{L}(F,K),\ \operatorname{Ker}\varphi \supset F\} = 0_{\mathcal{L}(F,K)}$

$\Rightarrow u^T$ injective

• Supposons u non surjective. $\operatorname{Im} u \subsetneq F$

Disposons de $\varphi \in \mathcal{L}(F,K)$ telle que $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im} u$.

$\varphi \neq 0_{\mathcal{L}(F,K)}$ et $\varphi \in \operatorname{Ker} u^T$. donc u^T n'est pas injective

• $\operatorname{Im} u^T = \{\varphi \circ u,\ \varphi \in \mathcal{L}(F,K)\} \subset \mathcal{L}(E,K)$.

Supposons u injective.

$\tilde{u} : E \longrightarrow \operatorname{Im}(u)$ est un isomorphisme.
$x \longmapsto u(x)$

Disposons de G tel que $\operatorname{Im}(u) \oplus G = F$

Prenons $\psi \in \mathcal{L}(E,K)$.

Posons $\varphi \in \mathcal{L}(F,K)$ telle que $\begin{cases} \forall y \in \mathrm{Im}(u), \ \varphi(y) = \psi \circ \tilde{u}^{-1}(y). \\ \forall y \in G, \ \varphi(y) = 0 \end{cases}$

$\forall x \in E, \quad \varphi \circ u(x) = \varphi(\underbrace{u(x)}_{\in \mathrm{Im}(u)}) = \psi \circ \tilde{u}^{-1} \circ u(x) = \psi(x)$

$u^T(\varphi) = \psi$

$\psi \in \mathrm{Im}\, u^T$

u^T est surjective

- Supposons u^T surjective.

$\forall \psi \in \mathcal{L}(E,K), \quad \mathrm{Ker}\,\psi = \mathrm{Ker}(\varphi \circ u) \supset \mathrm{Ker}\,u.$

(avec $\varphi \in \mathcal{L}(F,K)$)

En particulier : $\forall a \in E \setminus \{0_E\}, \quad \mathrm{Ker}\,u \subset \mathrm{vect}(a)$

donc $\mathrm{Ker}\,u \subset \{0_E\}$.

u est injective

② (*) Posons $f : t \longmapsto \dfrac{\sin(kt)}{t^\alpha}$, • f est C^0 sur $[1,+\infty[$.

- $f(t) = O\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$

Si $\alpha > 1$, alors f est intégrable sur $[1,+\infty[$

- Posons $\begin{vmatrix} u(t) = t^{-\alpha} \\ v'(t) = \sin(kt) \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} u'(t) = -\alpha t^{-\alpha-1} \\ v(t) = -\dfrac{\cos(kt)}{k} \end{vmatrix}$

$[u(t)v(t)]_{t=1}^{t\to+\infty} = \left[-t^{-\alpha}\dfrac{\cos(kt)}{k}\right]_{t=1}^{t=+\infty} = -0 + \dfrac{\cos(k)}{k}$ converge

car $\lim\limits_{+\infty} uv = 0 \quad (\alpha > 0)$

donc $\int_1^{+\infty} f$ a même nature que $\int_1^{+\infty} u'v = \dfrac{\alpha}{k}\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(kt)}{t^{\alpha+1}}$, qui converge

car $\dfrac{\cos(kt)}{t^{\alpha+1}} = O\left(\dfrac{1}{t^{\alpha+1}}\right)$.

f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

$\circledast$ $\sin^k(t) = \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^k = \frac{1}{(2i)^k} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{j} e^{i\ell t} \times (-1)^{k-\ell} \times e^{-it(k-\ell)}$

$$= \frac{1}{(2i)^k} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (-1)^{k-\ell} e^{it(2\ell-k)}.$$

$t \mapsto \sin^k t$ est une fonction polynômiale des $\left(t\mapsto \cos(\ell t), t\mapsto \sin(\ell t)\right)_{0\leq \ell\leq k}$

Or, pour $\ell \in [\![0,k]\!]$, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ell t)}{t^\alpha} dt$ (d'après la ①)

et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ell t)}{t^\alpha} dt$ (de même) convergent,

donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^k(t)}{t^\alpha} dt$ converge

Ex 25

① ⓐ • Pour $x \in \mathbb{R}$: $t \longmapsto f(t,x) = \dfrac{1}{1+t^x}$ est C^0 sur $]0,1]$.

• En 0^+ : Si $x \geqslant 0$, alors $t \mapsto f(t,x)$ est C^0 sur $[0,1]$

Si $x < 0$ alors $\lim\limits_{t \to 0} t^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{t \to 0} f(t,x) = 0$

$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$

ⓑ $a = -\infty$, $b = +\infty$

(*) Pour $t \in]0,1[$: $f(t,x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ $\quad \left(t^x = e^{x \overbrace{\ln t}^{<0}}\right)$

$f(t,x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

De plus : $\forall t \in]0,1[$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(t,x)| \leqslant 1$, intégrable sur $]0,1[$

Convergence dominée $\longrightarrow$ $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \displaystyle\int_0^1 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \displaystyle\int_0^1 0 = 0$

(*) Rem : F est $\uparrow$ sur $\mathbb{R}$ $\quad \big(a < b \Rightarrow \forall t \in]0,1[,\ t^a < t^b$

$\Rightarrow$ ——— $f(t,a) > f(t,b)\big)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$F(x)$	0	$\nearrow$ $1/2$ $\nearrow$	1

ⓒ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -\ln t \times \dfrac{t^x}{(1+t^x)^2}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = \frac{(\ln t)^2 t^x}{(1+t^x)^2} - \frac{(\ln t)^2 t^{2x}}{(1+t^x)^3}$$

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)\right| \leqslant \begin{cases} (\ln t)^2 (t^{-2} + t^{-4}) & \underline{\text{si}} \quad x \in [-2;0] \\ 2(\ln t)^2 & \underline{\text{si}} \quad x \in [0,2] \end{cases}$$

$\uparrow$

φ est intégrable sur $]0,1[$. (IPP pour $(\ln t)^2$)

Théorème de dérivation $\to$ F est C^2 sur $[-2,2]$

et $F'(0) = \displaystyle\int_0^1 -\frac{\ln t}{4} = -\frac{1}{4}\left[t\ln t - t\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

$$F''(0) = \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{4} - \frac{(\ln t)^2}{4} = 0$$

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + o(x^2)$$

ⓒ $F(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{4}x$

---

② ⓐ $P(X>k) = (1-p)^k$, $P(X\leqslant k) = 1-(1-p)^k$

$P(T>k) = P((X>k)\cap(Y>k)) = (1-p)^{2k} = \Big(\underbrace{(1-p)^2}_{q'}\Big)^k$

$P(T\leqslant k) = 1-(1-p)^{2k}$

ⓑ $P(T=k) = P(T>k-1) - P(T>k) = q'^{k-1} - q'^k = q'^{k-1}(1-q')$

$T \sim \mathcal{G}(p')$ en posant $p' = 1-q' = 1-(1-p)^2$

Ex 26 • Par récurrence : Posons $\alpha_n = \text{card}\underbrace{\{ \sigma \text{ involutions de } [\![1,n]\!] \}}_{I_n}$.

Pour former un élément de I_{n+1} :

on pose $\sigma(1) = 1$

(puis) on choisit une involution de $[\![2, n+1]\!] \longrightarrow \alpha_n$ possibilités.

OU on choisit $\sigma(1) \in [\![2, n+1]\!] \longrightarrow n$ possibilités

(puis) une involution de $[\![1, n+1]\!] \setminus \{1, \sigma(1)\} \longrightarrow \alpha_{n-1}$ possibilités

Nb total de choix possibles : $\boxed{\alpha_{n+1} = \alpha_n + n\,\alpha_{n-1}}$

• $\alpha_{n+1} > \alpha_n > \alpha_0$

donc $\alpha_{n+1} > n\,\alpha_{n-1} > n\,\alpha_0$ donc $n = O(\alpha_n)$ $\boxed{R \leqslant 1}$

• $\alpha_n = \alpha_{n+1} - n\,\alpha_{n-1} \sim -n\,\alpha_{n-1}$

$\left|\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}\right| \sim n \longrightarrow +\infty$ d'Alembert $\longrightarrow$ $\boxed{R = 0}$

Ex 43

- Prenons $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Posons $\lambda_{min} = \min Sp(A)$.

$\boxed{CN}$ Supposons $A \in \Omega$.

Disposons de $X \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_{min} I_n) \setminus \{0_{n,1}\}$

$AX = \lambda_{min} X$

$X^T A X = \lambda_{min} \|X\|^2 \geqslant \alpha \underbrace{\|X\|^2}_{>0}$, donc $\lambda_{min} \geqslant \alpha$. $Sp(A) \subset [\alpha, +\infty[$.

$\boxed{CS}$ Supposons $Sp(A) \subset [\alpha, +\infty[$

$A = PDP^T$, avec $P \in \mathcal{O}(n)$, $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$X^T A X = Y^T D Y$ en posant $Y = P^T X$.

$$= \sum_{i=1}^{n} D_{i,i} Y_i^2 \geqslant \lambda_{min} \|Y\|^2 = \lambda_{min} \|X\|^2 \quad (\text{car } P \in \mathcal{O}(n))$$

$$\geqslant \alpha \|X\|^2$$

$A \in \Omega$.

On a montré $\Omega = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ Sp(A) \subset [\alpha, +\infty[\}$

- $\alpha I_n \in \Omega \subset \mathrm{vect}(\Omega)$,

donc $\mathrm{vect}(I_n) \subset \mathrm{vect}(\Omega)$

Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: posons $\lambda_{min} = \min Sp(A)$

$Sp(A + (\alpha - \lambda_{min}) I_n) = \{\alpha - \lambda_{min} + \lambda,\ \lambda \in Sp(A)\} \subset [\alpha, +\infty[$

donc $A + (\alpha - \lambda_{min}) I_n \in \Omega$

donc $A \in \mathrm{vect}(\Omega)$

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{vect}(\Omega)$

Ex 44] • $M_n = \begin{pmatrix} v_1 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & v_n \end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{R})$ donc M_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. 29

• Soit $\lambda \in Sp(M_n)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M_n - \lambda I_n) \setminus \{0_{n,1}\}$.

$$\begin{cases} v_1 x_1 + x_2 = \lambda x_1 \\ \forall k \in [\![3, n]\!],\ x_{k-2} + v_{k-1} x_{k-1} + x_k = x_{k-1} \times \lambda \\ x_{n-1} + v_n x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

Par récurrence immédiate : $\forall k \in [\![2, n]\!],\ x_k = \mu_k x_1$, avec $\mu_k \in \mathbb{R}$.

$X \in \mathrm{vect}(U)$ en posant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$

$\dim \mathrm{Ker}(M_n - \lambda I_n) \leq 1$
$= 1$

Or $\sum_{\lambda \in Sp M_n} \dim \mathrm{Ker}(M_n - \lambda I_n) = n$,

donc $\mathrm{card}(Sp M_n) = n$. M_n a n vp. propres distinctes.

Ex 45 Posons $M = \|u\|$, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |u_k|$

• Supposons (b) : Soit $\varepsilon > 0$.

$\lim\limits_{n \notin A} u_n = 0$, donc : $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq N$, $n \notin A \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon$.

Pour $n \geq N$:

$$S_n = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1} |u_k|}_{S_{n,1}} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{\substack{N \leq k \leq n-1 \\ k \notin A}} |u_k|}_{S_{n,2}} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{\substack{N \leq k \leq n-1 \\ k \in A}} |u_k|}_{S_{n,3}}$$

$S_{n,3} \leq \frac{M \operatorname{card}(A \cap [\![0, n-1]\!])}{n} \leq \frac{M \operatorname{card}(A \cap [\![0, n]\!])}{n}$ donc $S_{n,3} \longrightarrow 0$

$S_{n,2} \leq \frac{\varepsilon}{n} \times (n - N) \leq \varepsilon$

$S_{n,1} \longrightarrow 0$ donc $\exists N'$, $\forall n \geq N'$, $S_{1,n} \leq \varepsilon$

$\forall n \geq \max(N, N')$, $S_n \leq 2\varepsilon$ (a) est vraie

• Supposons (a). et $(u_n) \neq (0)$ (sinon $A = \emptyset$ convient)

(S_n) est bornée. Posons $x_n = \sup\{S_k, k \geq n\}$.

(x_n) est $\downarrow$; positive, donc converge vers $e \geq 0$.

$x_n \longrightarrow 0$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n \geq N$, $\left| \begin{array}{l} 0 \leq S_n \leq \varepsilon \\ \{S_k, k \geq n\} \subset [0, \varepsilon[\\ x_n \leq \varepsilon \end{array} \right.$

Posons $A = \{k \in \mathbb{N}, |u_k| \geq \sqrt{x_k}\}$.

$\forall n \notin A$, $|u_n| < \sqrt{x_n}$ donc $\lim\limits_{n \notin A} u_n = 0$

$$\operatorname{card}(A \cap [\![0, n-1]\!]) = \sum_{k \in A \cap [\![0,n-1]\!]} 1 \leq \sum_{k \in A \cap [\![0,n-1]\!]} \frac{|u_k|}{\sqrt{x_k}} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|u_k|}{\sqrt{x_k}}$$

$$0 \leq \frac{1}{n} \operatorname{card}(A \cap [\![0, n-1]\!]) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{\sqrt{x_n}} = \frac{1}{\sqrt{x_n}} S_n \leq \sqrt{x_n}.$$

(b) est vraie

Ex 46 • $A \in S_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

• $P^T A P = D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. $\boxed{\text{Met 1}}$

Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: ... $\alpha \|X\|^2 \leq X^T A X \leq \beta \|X\|^2$ avec $\alpha = \min Sp(A)$
$\beta = \max Sp(A)$.

$$X^TAX = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i x_j a_{ij} = \int_0^1 \sum_{i,j} x_i x_j t^{i+j-2} dt \quad \left(a_{i,j} = \int_0^1 t^{i+j-2} dt \right)$$

$$= \int_0^1 \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}}_{P(t)} \Big)^2 dt > 0$$

$Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$, $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

• $\boxed{\text{Met 2}}$ Posons $\langle\, ,\, \rangle : (f,g) \mapsto \int_0^1 fg$, produit scalaire sur $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

$$A_{i,j} = \frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 t^{i+j-2} = \langle \underbrace{t \mapsto t^{i-1}}_{f_i}, \underbrace{t \mapsto t^{j-1}}_{f_j} \rangle$$

Posons $M = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(f_1, \dots f_n)$, avec $\mathcal{B}$ une BON de $\mathrm{vect}(\underbrace{f_1 \text{---} f_n}_{\text{libre}})$ pour $\langle\, ,\, \rangle$.
$= (e_1 \text{---} e_n)$

$$[M^TM]_{i,j} = \sum_{k=1}^n M_{ki} M_{kj} = \sum_{k=1}^n \langle f_i, e_k \rangle \langle f_j, e_k \rangle = \langle f_i, f_j \rangle = A_{i,j}$$

$A = M^T M$

Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $X^TAX = \|MX\|^2 > 0$ $\quad A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

$$= \Big\| \sum_{j=1}^n x_j f_j \Big\|^2 = \int_0^1 \Big(\sum_{j=1}^n x_j t^{j-1} \Big)^2 dt.$$

• Indication : Montrons $\displaystyle\int_{-1}^1 P(t)\, dt = -\int_0^\pi P(e^{i\theta}) i e^{i\theta} d\theta$

$$-\int_0^\pi (e^{i\theta})^k i e^{i\theta} d\theta = \left[-\frac{e^{i\theta(k+1)}}{k+1} \right]_0^\pi = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} = \int_{-1}^1 t^k dt.$$

Par linéarité : $\displaystyle\int_{-1}^1 P(t)dt = -\int_0^\pi P(e^{i\theta}) i e^{i\theta} d\theta.$

- $X^T A X \leq \underset{(\in \mathbb{R}_+)}{\int_{-1}^{1} P(t)^2\,dt} = \left| - \int_0^{\pi} P(e^{i\theta})^2 i e^{i\theta}\,d\theta \right| \leq \int_0^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2\,d\theta$

$$= \int_0^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} x_k e^{i(k-1)\theta} \right|^2 d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \sum_{k,\ell} x_k x_\ell\, e^{i(k-\ell)\theta}\,d\theta$$

$$= \sum_{k,\ell} x_k x_\ell \times \int_0^{\pi} e^{i(k-\ell)\theta}\,d\theta$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \times \pi = \pi \|X\|^2.$$

Pour $\lambda \in Sp\,A$, $X \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \setminus \{0\}$: $X^T A X = \lambda \|X\|^2 \leq \pi \|X\|^2$

donc $\lambda \leq \pi$

$\boxed{Sp(A) \subset]0, \pi[}$

- Posons $X = E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$X^T A X = \|f_n\|^2 = \int_0^1 t^{2n-2}\,dt = \dfrac{1}{2n-1}$.

- $A = P^T D P$, avec $P \in O(n)$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$. Posons $\alpha = \min Sp(A)$

Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $X^T A X = (X^T P) D \underbrace{(P^T X)}_{Y} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2 \geq \alpha \sum_{j=1}^{n} y_j^2 = \alpha \|Y\|^2 = \alpha \|X\|^2$ $(P \in O(n))$

$\boxed{\text{donc } \dfrac{1}{2n-1} \geq \alpha = \min Sp(A)}$

Ex 57 (1) Supposons $\|f\| = 0$. $f + f' = 0$

$f : x \mapsto \lambda e^{-x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Or $f(0) = 0$ donc $\lambda = 0$, $f = 0$ (Séparation)

...

(2) Posons $g = (f + f') = \frac{(f(x)\, e^{x})'}{e^{x}}$

$f(x) e^{x} = \int_0^x e^{x} g + \underbrace{f(0)}_{0}$ donc $f(x) = e^{-x} \int_0^x g(t) e^{t}\, dt$

$|f(x)| \leqslant \int_0^x |g|\, e^t dt \leqslant \|g\|_\infty x e \leqslant \|g\|_\infty e = \|f\| e$ $(e^{-x} \leqslant 1)$ $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|$

(3) Posons $f_n : x \mapsto e^{-nx}$ $\|f_n\|_\infty = 1$

$\|f_n\| = \|e^{-nx} - n e^{-nx}\|_\infty = n - 1$

(f_n) est bornée pour $\| \|_\infty$ mais pas pour $\| \|$. Elles ne sont pas équivalentes

Ex 58 1) On se place sur $\Omega = \mathcal{P}(⟦1,n⟧)^2$ muni de l'équiprobabilité.

Posons $E = \{(A,B) \in \Omega,\ A \cap B = \emptyset\} = \bigsqcup_{0 \leq k \leq n} E_k$,

en posant, pour $k \in ⟦0,n⟧$: $E_k = \{(A,B) \in \Omega ;\ |A| = k,\ B \subset \overline{A}\}$

Pour former un élément de E_k :

on choisit $A \in \mathcal{P}(⟦1,n⟧)$ telle que $|A| = k$: $\binom{n}{k}$ possibilités,

puis on choisit $B \in \mathcal{P}(\overline{A})$: $2^{\text{card}(\overline{A})} = 2^{n-k}$ possibilités

donc $|E_k| = \binom{n}{k} \times 2^{n-k}$

$$|E| = \sum_{k=0}^{n} |E_k|$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 2^{n-k}$$

$$= 3^n$$

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{3^n}{(2^n)^2} = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

$\boxed{\cancel{12}}$ (2) • $\underline{\text{Pour } n \in \mathbb{N}}$; posons $n = \sum_{k=0}^{N(n)-1} \underbrace{a_{k,n}}_{\in [\![0,9]\!]} \times 10^k = \overline{a_{N(n)-1,n} \ldots a_{0,n}}^{10}$

• $0 \leqslant p_n = \prod_{k=0}^{N(n)-1} a_{k,n} \leqslant 9^{N(n)} = e^{N(n) \times \ln 9}$

$$= e^{\left(\log_{10}(n) + O(1)\right) \times \ln 9}$$

$$= e^{\ln\left(\frac{9}{10}\right) \ln(n) + O(1)}$$

$$= O\Big(\underbrace{n^{\ln\left(\frac{9}{10}\right)}}_{\alpha_n}\Big)$$

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\ln\left(\frac{9}{10}\right)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

$\underline{\text{donc}}$ $\sum \alpha_n x^n$ est de rayon de convergence 1

$\underline{\text{donc}}$ $\sum p_n x^n$ ———————— $R \geqslant 1$.

• (p_n) n'est pas bornée $\left(\underline{\text{pour}} \ n = \overline{\underbrace{9 \text{———} 9}_{N \text{ chiffres}}}^{10} ; \ p_n = 9^N \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty \right)$

$\underline{\text{donc}}$ $R \leqslant 1$

$\underline{\text{donc}}$ $\underline{R = 1}$