Ex 28 $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable, $A - I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \\ \vdots & 0 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$

$rg(A-I) = 2$, $\dim \operatorname{Ker}(A-I) = n-2$

$\chi_A = (X-1)^{n-2}(X-\lambda)(X-\mu)$, avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda+\mu+n-2 = n$, $\lambda+\mu = 2$

• $\lambda\mu = \det A = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{vmatrix}_n$ $\quad C_1 \leftarrow C_1 - \sum_{j=2}^{n} C_j$

V1

$= \begin{vmatrix} \alpha & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix}_n$ avec $\alpha = 1-(n-1) = 2-n$

(On développe selon C_1)

$= 2-n$.

λ, μ sont racines de $X^2 - 2X + 2 - n$.

$\Delta' = 1-(2-n) = n-1$, $\lambda = 1+\sqrt{n-1}$, $\mu = 1-\sqrt{n-1}$

V2 $\operatorname{Im}(A-I) = \operatorname{vect}(U, E_1)$ est stable par A, en posant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

$AE_1 = U$

$AU = \begin{pmatrix} n \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix} = 2U + (n-2)E_1$

Posons a' induit par A sur $\operatorname{Im}(A-I)$ $\quad \chi_{A'} = X^2 - 2X - (n-2)$ $\quad$ Racines $1 \pm \sqrt{n-1}$

$A' = \operatorname{mat}_{(U,E_1)}(a') = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ n-2 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_{A'} \mid \chi_A$

donc $\lambda, \mu = 1 \pm \sqrt{n-1}$.

Ex 47

$n \geq 1$

- $p_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)\binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^{k}(1-x)^{n-k-1}$

$k' = k+1$

$= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^{k-1}(1-x)^{n-k} - \sum_{k=1}^{n+1} (n-k+1)\binom{n}{k-1} f\left(\frac{k-1}{n}\right) x^{k-1}(1-x)^{n-k}$

$= \sum_{k=1}^{n} \left[k\binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) - (n-k+1)\binom{n}{k-1} f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right] x^{k-1}(1-x)^{n-k}$

$= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}\left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right] x^{k-1}(1-x)^{n-k} \geq 0$

p_n est $\nearrow$ sur $[0,1]$.

- Disposons de $S_x \sim \mathcal{B}(n,x)$. $\quad p_n(x) = E\left(f\left(\frac{S_x}{n}\right)\right)$

- Soit $(x,y) \in [0,1]^2$ tq $x < y$.

Disposons de $S_x = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathcal{B}(n,x)$, avec $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ IID $\mathcal{B}(x)$

$S_y = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathcal{B}(n,y)$, avec $(Y_k)_{1\leq k\leq n}$ IID $\mathcal{B}(y)$

et tq la loi de (X_k, Y_k) est

$Y_k \backslash X_k$	0	1
0	$1-y$	0
1	$y-x$	x

$P(S^y \geq S^x)$

$P\left(f\left(\frac{S^y}{n}\right) \geq f\left(\frac{S^x}{n}\right)\right) = 1$

donc $E\left(f\left(\frac{S^y}{n}\right) - f\left(\frac{S^x}{n}\right)\right) \geq 0$.

$p_n(y) \geq p_n(x)$

p_n est $\nearrow$

Ex 48 ① $M \notin GL_n(\mathbb{R}) \iff \det M = X^2 - Y^2 = 0$

$\iff X^2 = Y^2 \iff X = Y$

$$\mathbb{P}(M \notin GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{P}(X^2 = Y^2)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) \times \mathbb{P}(Y=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^k \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} p \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!} = p e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} = \boxed{p e^{-\lambda p}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(M \in GL_n(\mathbb{R})) = 1 - p e^{-\lambda p}.}$$

---

② $\chi_M(x) = x^2 - 2Xx + X^2 - Y^2$. $\Delta = 4(X^2 - (X^2 - Y^2)) = 4Y^2 \geq 0$

$M \in S_2(\mathbb{R})$ est $\boxed{\text{diagonalisable.}}$ Racines $\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} = X \pm Y$. $\mathrm{Sp}\,M = \{X-Y, X+Y\}$

1er cas : $\Delta > 0 \to 2$ racines distinctes. $\mathrm{Ker}(M - r_1 I_2) = \mathrm{vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}(M - r_2 I_2) = \mathrm{vect}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

2ème cas : $\Delta = 0$.

$Y = 0$, $\boxed{M = I_2}$

$$\boxed{\mathbb{P}(M \text{ diagonalisable}) = 1}$$

---

③ $M^8 = I_2 \iff \mathrm{diag}(r_1, r_2)^8 = I_2$

$\iff r_1^8 = r_2^8 = 1$

$\iff (X+Y)^8 = (X-Y)^8 = 1$

$\iff \begin{cases} X+Y = \pm 1 \\ X - Y = \pm 1 \end{cases} \iff (X,Y) = (1,0)$ ou $(X,Y) = (-1,0)$ ou $(X,Y) = (0,1)$ ou $(X,Y) = (0,-1)$

$$\boxed{\mathbb{P}(M^8 = I_2) = \mathbb{P}((X,Y) = (0,1)) = p e^{-\lambda}.}$$

---

④ • $M \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} X+Y \geq 0 \\ X - Y \geq 0 \end{cases} \iff X \geq Y$

On cherche $\mathbb{P}(M \in S_n^+(\mathbb{R})) = \mathbb{P}(X \geq Y) = \sum_{1 \leq i \leq j} \mathbb{P}((X,Y) = (j,i))$

$$= \sum_{1 \leq i \leq j} p(1-p)^{i-1} \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} = p e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \sum_{i=1}^{j} (1-p)^i = p e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\lambda^j \left((1-p) - (1-p)^{j+1}\right)}{p}$$

$$= e^{-\lambda}(1-p) \sum_{j \geq 1} \lambda^j - (1-p)^j = \boxed{e^{-\lambda}(1-p) \times \left[\frac{\lambda}{1-\lambda} - \frac{1-p}{p}\right]}$$

$E = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,\ n \in \mathbb{N},\ (a_0 - a_n) \in \{-1;0;1\}^{n+1},\ a_n = 1 \right\}$

$A = \{ x \in \mathbb{R},\ \exists P \in E,\ P(x) = 0 \}$.

• Soit $x \in A \setminus \{0\}$. $\exists P \in E,\ P(x) = 0$

▫ $P(-X) = 0$ et $P(-(-x)) = 0$, donc $\boxed{-x \in A}$

▫ Posons $Q = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$.

$Q \in E$ et $Q\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^n P(x) = 0$ donc $\boxed{\frac{1}{x} \in A}$

▫ Supposons $x > 1$.

$$x^n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \leq \sum_{k=0}^{n-1} x^k \leq \frac{x^n}{x-1}$$

$$1 \leq \frac{1}{x-1}$$

$x - 1 \leq 1$ donc $x \leq 2$.

$$\boxed{A \cap]2, +\infty[= \emptyset}$$

donc $A \cap]-\infty, -2[= A \cap]0, \frac{1}{2}[= A \cap]-\frac{1}{2}, 0[= \emptyset$

$$\boxed{A \subset \left[-2, -\frac{1}{2}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{1}{2}, 2\right].}$$

• Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right] \setminus A$.

On pose $P_0 = 1 - x$, $n_0 = 0$

et pour $j \in \mathbb{N}$, $n_{j+1} = \min\{ n > n_j,\ P_j(a) \geq a^n \}$

$$P_{j+1} = P_j - X^{n_{j+1}}.$$

$$0 < P_{j+1}(a) < a^{n_{j+1}-1} - a^{n_{j+1}} = (1-a) a^{n_{j+1}-1} < a\, a^{n_{j+1}-1} = a^{n_{j+1}}$$

$P_j' \leq -1$ sur $\mathbb{R}_+$,

donc $P_j(a + P_j(a)) \leq P_j(a) - P_j(a) = 0$

$\exists x_j \in [a, a + P_j(a)],\ P_j(x_j) = 0$

$P_j(a) \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0$ donc $\underbrace{x_j}_{\in A} \longrightarrow x$ $\qquad x \in \bar{A}$.

On a montré $\left[\frac{1}{2}, 2\right] \subset \bar{A}$. Par symétrie : $\boxed{\bar{A} = \left[\frac{1}{2}, 2\right] \cup \{0\} \cup \left[-2, -\frac{1}{2}\right]}$

Ex 50 ① $A = PDP^T$, avec $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Prenons $v \in \mathbb{R}^n$.

Pour $p \in [\![0, n-1]\!]$: $A^p = PD^pP^T$

$$A^p v = PD^p \underbrace{P^T v}_{y \in \mathbb{R}^n}$$

$$\det(A^p v)_{0 \leq p \leq n-1} = \det(PD^p y)_{0 \leq p \leq n-1}$$

$$= \det P \times \det(D^p y)_{0 \leq p \leq n-1}$$

$$= \det P \times \left|\lambda_i^j y_i\right|_{0 \leq i,j \leq n-1} \quad \text{en posant } D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$= \det P \times \prod_{i=0}^{n-1} y_i \times \left|\lambda_i^j\right|_{0 \leq i,j \leq n-1}$$

$$= \det \times \prod_{i=0}^{n-1} y_i \times \underbrace{V(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})}_{0 \text{ car 2 des valeurs sont identiques}}$$

$$= 0$$

---

② Posons (a) : $\exists c \in \mathbb{R}$, $M_{a+c}(a+c, f(a+c)) \in T_c(\mathcal{C}_f)$

(a) $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}$, $f(a+c) = f(c) + f'(c) \times a$

Posons $g : x \longmapsto f(a+x) - f(x) - af'(x)$

$\varphi : x \longmapsto \int_x^{a+x} f(t)\,dt - a f(x)$. φ est dérivable et $\varphi' = g$.

$$\varphi(T) - \varphi(0) = \int_T^{a+T} f - \int_0^a f - a\underbrace{(f(T) - f(0))}_{0}$$

$$\underset{(\text{CV } t' = t - T)}{=} \int_0^a f(t+T)\,dt - \int_0^a f(t)\,dt = 0$$

D'après le théorème de Rolle, $\exists c \in \mathbb{R}$, $\varphi'(c) = 0 = g(c)$.

$$\boxed{f(a+c) = f(c) + af'(c)}$$

Ex 51 • $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A, B) & \longmapsto & \mathrm{tr}(AB) \end{array}$ est un produit scalaire (...)

donc (...) : $\exists !\, A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ f : M \longmapsto \mathrm{tr}(AM)$.

• Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$X^T A X = \mathrm{tr}(X^T A X) = \mathrm{tr}(A \underbrace{X X^T}_{\in S_n^+(\mathbb{R})}) = \varphi(XX^T) \geq 0.$$

(...)

$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

• $P^T A P = D = \mathrm{diag}(\lambda_1 \text{---} \lambda_n)$, avec $(\lambda_1 - \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$
$P \in \mathcal{O}(n)$

On écrit $P = (X_1 | \dots | X_n)$

$(X_1, \dots, X_n)$ est une BON de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ euclidien canonique.

$$A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k X_k^T$$

(...)

• $\forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,
$$\boxed{\begin{aligned} f(M) &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{tr}(X_k X_k^T M) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{tr}(X_k^T M X_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k^T M X_k . \end{aligned}}$$

Ex 52 • Supposons $n \geq 2$ et posons $A = \{a_1; \dots; a_n\}$ avec $a_1 < \dots < a_n$.

• $\underbrace{a_1+a_1 < a_2+a_1 < \dots < a_n+a_1}_{n \text{ éléments}} < \underbrace{a_n+a_2 < \dots < a_n+a_n}_{n-1 \text{ éléments}}$

$\boxed{\mathrm{card}(B) \geq 2n-1}$

• Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$: $a_i + a_j = a_j + a_i$,

$\mathrm{card}\, B \leq \mathrm{card}\, \{\underbrace{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \leq j}_{C}\} = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$

$\left(\varphi : C \to B\right.$
$(i,j) \mapsto a_i + a_j$ est surjective$\left.\right)$

• Soit $k \geq 2$: 1er cas : $k < n$.

$\underbrace{a_1+a_1+\dots+a_1}_{k-1 \text{ termes}} < a_2+a_1+\dots+a_1 < \dots < a_n+a_1+\dots+a_1+a_n \leftarrow n$ éléments

$< a_n+a_2+a_1+\dots+a_1 < \dots < a_n+a_n+a_1+\dots+a_1 \leftarrow n-1$ éléments

...

$< \underbrace{a_n+\dots+a_n}_{k-1 \text{ termes}}+a_1+\dots+a_1 < \dots < \underbrace{a_n+\dots+a_n}_{k-1 \text{ terme}}+a_n+a_1+\dots+a_1$

$\uparrow$ $n-k+1$ éléments

$\mathrm{card}(B) \geq n+(n-1)+\dots+(n-k+1) = \boxed{kn - \frac{k(k-1)}{2}}$

2ème cas : $k \geq n$: $\mathrm{card}(B) \geq n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$

• $\mathrm{card}(B) \leq \displaystyle\sum_{\substack{(i_1,\dots,i_k) \in [\![1,n]\!]^k \\ i_1 \leq \dots \leq i_k}} 1 = \alpha$ On montre par récurrence ou par dénombrement $\alpha = \binom{n+k-1}{k}$

- Démo. par récurrence : Hérédité :

$$\alpha = \sum_{i_1=1}^{n} \left(\sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} 1 \right)$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \binom{i_1+k-2}{k-1}$$

$$= \sum_{j=k-1}^{n+k-2} \binom{j}{k-1}$$

$(j = i_1+k-2)$

$$= \sum_{j=k-1}^{n+k-2} \binom{j}{k-1} = \sum_{j=k-1}^{n+k-2} \binom{j+1}{k} - \binom{j}{k} = \binom{n+k-1}{k}$$

Ex 29 • Posons $g = f + f'$

$(\dots)$ $\quad f(x) = Ae^{-x} + e^{-x}\int_a^x e^t g(t)\,dt$, avec $A \in \mathbb{R}$.

• Montrons $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}\int_a^x e^t g(t)\,dt = \ell$

Met 1

Soit $\varepsilon > 0$: $\quad \exists A \geqslant a,\ \forall x \geqslant A,\ |g(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$

$$(\ell-\varepsilon)(e^x - e^A) \leqslant \int_A^x e^t g(t)\,dt \leqslant (\ell+\varepsilon)(e^x - e^A)$$

$$\underbrace{(\ell-\varepsilon)(1-e^{A-x})}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell-\varepsilon} \leqslant e^{-x}\int_A^x e^t g(t)\,dt \leqslant \underbrace{(\ell+\varepsilon)(1-e^{A-x})}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell+\varepsilon},$$

$\exists B \geqslant A,\ \forall x \geqslant B, \quad \ell - 2\varepsilon \leqslant e^{-x}\int_A^x e^t g(t)\,dt \leqslant \ell + 2\varepsilon$

On a montré $\quad e^{-x}\int_A^x e^t g(t)\,dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$

donc $\quad e^{-x}\int_a^A e^t g(t)\,dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \quad$ (Chasles)

• donc $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.

Met 2 $\quad e^{-x}\int_a^x e^t g(t)\,dt = \int_{e^{a-x}}^1 t\, g(x+\ln t) \times \frac{dt}{t} = \int_0^1 f(t,x)\,dt$

CV $t' = e^{t-x}$, $\quad t = x + \ln t'$ $\qquad$ avec $f(t,x) = \begin{cases} g(x+\ln t) & \text{si } t > e^{a-x} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$f(t,x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ $\quad$ (pour x grand, $f(t,x) = g(x+\ln t)$)

$|f(t,x)| \leqslant \|g\|_\infty^{[a,+\infty[}$ intégrable sur $[0,1]$

$|f(t,x)| \leqslant g(x+\ln t)$ avec $x + \ln t$

Theo de CD à paramètre continu $\rightarrow$ $\quad \int_0^1 f(x,t)\,dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^1 \ell = \ell$

Ex 53 ① • $\varphi : x \mapsto x - e^{-x}$ est cont. et st $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$, donc définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\varphi(\mathbb{R}) =]-\infty, +\infty[$.

$\boxed{\exists!\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda = e^{-\lambda}}$

$\varphi(0) = -1$ donc $\lambda > 0$

$\varphi(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$ donc $\lambda < 1$

② • $h(s) = f'(s) - \lambda f(s)$ (*)

Solutions de $y' - \lambda y = 0 \to \text{vect}(s \mapsto e^{\lambda s})$

On écrit $f(s) = z(s) e^{\lambda s}$

$h = f' - \lambda f$ donc $\forall s,\ z'(s) e^{\lambda s} = h(s)$

$\Leftrightarrow \forall t,\ z(t) = A + \int_0^t e^{-\lambda s} h(s)\, ds$

$\Leftrightarrow \forall t,\ f(t) = e^{\lambda t}\left(f(0) + \int_0^t e^{-\lambda s} h(s)\, ds\right)$

③ • f est bornée, donc h est bornée, donc $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} h(s)\, ds$ converge ($\lambda > 0$)

$e^{\lambda t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$, et f est bornée,

donc nécessairement $f(0) = -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} h(s)\, ds$

$$f(t) = -e^{\lambda t} \int_t^{+\infty} e^{-\lambda s} h(s)\, ds$$

• On $h(s) = f(s-1) - \lambda f(s)$,

donc $f(t) = -e^{\lambda t} \int_t^{+\infty} e^{-\lambda s} f(s-1)\, ds + e^{\lambda t} \lambda \int_t^{+\infty} e^{-\lambda s} f(s)\, ds$ $\quad s' = s - 1$

$= -\underbrace{e^{\lambda t} \times e^{-\lambda}}_{\lambda} \int_{t-1}^{+\infty} e^{-\lambda s} \times f(s)\, ds + e^{\lambda t} \lambda \int_t^{+\infty} e^{-\lambda s} f(s)\, ds$

$= -\lambda e^{\lambda t} \int_{t-1}^{t} e^{-\lambda s} f(s)\, ds \underset{(s' = s - t)}{=} -\lambda \int_{-1}^{0} e^{-\lambda s} f(s+t)\, ds$

$|f(t)| \leq \|f\|_\infty \times \lambda \int_{-1}^{0} e^{-\lambda s}\, ds = \|f\|_\infty (e^{\lambda} - 1)$. $\quad \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \underbrace{(e^{\lambda} - 1)}_{\in]0,1[}$ donc $\|f\|_\infty = 0$

$f = 0$

Ex 54 $n \in \mathbb{N}^*$

- $n = 1 \longrightarrow 1 = 1^2$

$n = 2 \longrightarrow 2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$

$n = 3 \longrightarrow 3 = -1^2 + 2^2$.

- $\forall x, \quad (x+4)^2 - (x+2)^2 = 4x + 12$

$(x+3)^2 - (x+1)^2 = 4x + 8$

donc $(x+4)^2 - (x+3)^2 - (x+2)^2 + (x+1)^2 = 4. \quad (*)$

- $(k+8)^2 - (k+7)^2 - (k+6)^2 + (k+5)^2 - (k+4)^2 + (k+3)^2 + (k+2)^2 - (k+1)^2 = 0 \; (**)$

- DE de n par 4 : $n = 4q + r$ avec $r \in [\![0,3]\!]$

r s'écrit sous la forme voulue.

$4q$ s'écrit comme somme de q expressions de la forme $(*)$

($+$ des blocs de la forme $**$ éventuellement).