Ex 9

① $S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

② Pour $x > -1$: $f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} \sim \frac{x}{n^2}$

$\sum f_n(x)$ converge. $S(x)$ existe. (vrai aussi si $x \leq -1$)

③ $f_n'(x) = \frac{1}{(n+x)^2} \leq \frac{1}{(n+a)^2}$ pour $x \geq a > -1$

$\sum f_n'$ CN sur $[a, +\infty[$, donc CU sur $[a, +\infty[$.

(...) S est C^1 sur $[a, +\infty[$ pour $a > -1$

donc sur I

④ • Rem : $f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{n}$ ($\sum \frac{1}{n}$ diverge, pas de théo de la double limite possible).

• Pour $n \geq 2$: $f_n(x) \xrightarrow[x \to (-1)^+]{} \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} = -\frac{1}{n(n-1)}$.

$|f_n(x)| = \frac{|x|}{n(n+x)}$

$\|f_n\|_\infty^{]-1,0]} \leq \frac{1}{n(n-1)}$

$\sum_{n \geq 2} f_n$ CN sur $]-1, 0]$

Théo de la double limite : $\sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x \to (-1)^+]{} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

$= -1$.

$S(x) = \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)}_{\xrightarrow[x \to (-1)^+]{} 0} + 1 - \frac{1}{1+x} \underset{x \to (-1)^+}{\sim} -\frac{1}{1+x}$

• Met 2 : en $(-1)^+$: $S(x+1) \underset{(...)}{=} S(x) + \frac{1}{1+x}$. $S(x) = S(x+1) - \frac{1}{1+x}$

$\underset{x \to (-1)^+}{\sim} -\frac{1}{1+x}$

$(S(x+1) \longrightarrow S(0) = 0)$.

- En $+\infty$: Comparaison série - intégrale :

Posons $g_x : t \longmapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} = \frac{x}{t(t+x)}$ cont. et $\downarrow$ sur $[1, +\infty[$

$$\int_1^n g_x(t)\,dt \underset{(\dots)}{=} \ln\left(\frac{n}{n+x}\right) + \ln(1+x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln(1+x)$$

$$\int_1^{+\infty} g_x(t)\,dt = \ln(1+x)$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_k^{k+1} g_x \leq g_x(k) \leq \int_{k-1}^{k} g_x$$

$(k \geq 2)$

$$\int_1^{n+1} g_x \leq \sum_{k=1}^{n} g_x(k) \leq g_x(1) + \int_1^{n} g_x$$

$$\ln(1+x) \leq S(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln(1+x)$$

$$S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln(1+x)$$

Ex 1 • $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+n^2x^2}$ Critère spécial des SA $\to$ $\sum u_n$ CS sur $\mathbb{R}$.

• $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n| = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+n^2x^2} = \left[\frac{1}{n}\arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2n}$ $\quad \sum \frac{\pi}{2n}$ diverge !

(u_n intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$)

• $|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \dfrac{1}{1+(n+1)^2x^2}$.

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(x) + \int_0^{+\infty} R_n(x)\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k\pi}{2k} + \int_0^{+\infty} R_n(x).$$

$$\left|\int_0^{+\infty} R_n(x)\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+(n+1)^2x^2} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} R_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k\pi}{2k}}$$

Ex 2 $P(X \geqslant 2\lambda) = P(e^{tX} \geqslant e^{2t\lambda})$ pour $t > 0$

$$\underset{\text{(Markov)}}{\leqslant} \frac{E(e^{tX})}{e^{4t\lambda}} = \dots = \frac{e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}}{e^{4t\lambda}} = e^{\overbrace{-\lambda+\lambda e^t - 4t\lambda}^{\alpha(t)}}$$

$\alpha'(t) = \lambda e^t - 4\lambda = \lambda(e^t - 4) > 0 \iff t > 2\ln 2$

α est minimum pour $t = 2\ln 2$

$\alpha(2\ln 2) = -\lambda + 4\lambda - 8\lambda\ln 2 = \lambda(3 - 8\ln 2)$

$$\boxed{P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{e^{3\lambda}}{2^{8\lambda}} \leqslant \frac{e^{\lambda}}{4^{\lambda}}.}$$

Ex 6

1) a) • $F : a \longmapsto \int_0^a e^{t^2}\,dt$ est st $\uparrow$ et continue (primitive de $t \mapsto e^{t^2}$) sur $\mathbb{R}$, donc réalise une bij. de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

(en effet. $e^{t^2} \geq t^2$ donc $\int_0^{+\infty} e^{t^2}\,dt$ et $\int_0^{-\infty} e^{t^2}\,dt$ divergent)

• $\exists!\, a_x \in \mathbb{R},\ F(a_x) = 1 + F(x)$, $F(a_x) - F(x) = 1$. $a_x = F^{-1}(1 + F(x))$.

b) F est C^∞ sur $\mathbb{R}$, et $F' > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc F^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

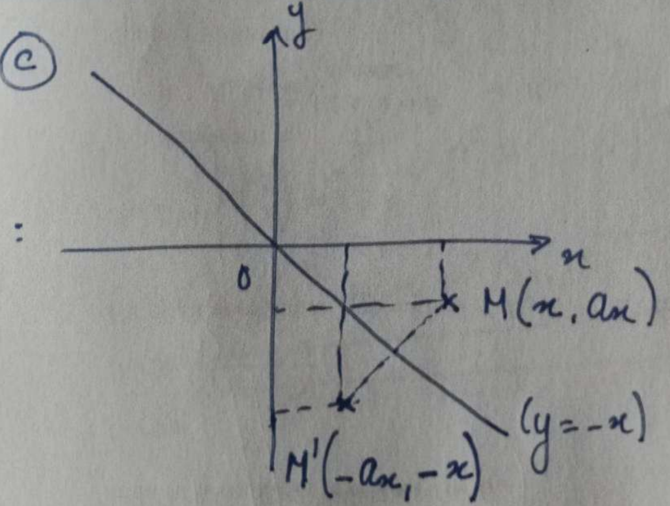
Supposons $\mathcal{P}(n)$. F^{-1} est C^n sur $\mathbb{R}$. (pour $n \geq 1$)

$(F^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ est C^n sur $\mathbb{R}$

(f^{-1} et f' sont C^n sur $\mathbb{R}$, et $f' \circ f^{-1} > 0$ sur $\mathbb{R}$)

donc f^{-1} est C^{n+1} sur $\mathbb{R}$. $\mathcal{P}(n+1)$ est Vraie

c)



• Pour $M(x,y)$: posons $M' = s_{(y=-x)}(M)$

$\overrightarrow{MM'} \perp (1,-1)$

et I milieu de $[MM']$ est sur $(y = -x)$

$\begin{cases} x' - x = y' - y \\ \frac{y+y'}{2} = -\frac{x+x'}{2} \end{cases}$ donc $\begin{cases} y' = -x \\ x' = -y \end{cases}$

• $\mathcal{C}_a$ sym. par rapport à $(y = -x)$ $\iff \forall x \in \mathbb{R},\ a(-a_x) = -x$

$\iff a \circ (-a) = -id_E$

Or $\int_{-a_x}^{-x} e^{t^2}\,dt = \int_x^{a_x} e^{t^2}\,dt = 1$, donc $-x = a(-a_x)$.

($t \mapsto e^{t^2}$ est paire)

Ex 14 1. Posons $f_a : t \longmapsto t^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

f_a solution de (E) $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \alpha(\alpha-1)t^\alpha - \alpha t^\alpha - 3t^\alpha = 5t^4$

$\Leftrightarrow \alpha = 4$

2. • Posons S_+ l'ens. des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$

S_- ———————— $\mathbb{R}_-^*$

S ———————— $\mathbb{R}$

S_0^+, S_0^-, S ———————— de l'équation homogène sur $\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*, \mathbb{R}$.

• On cherche des solutions de (E_0) sous la forme $f_a : t \mapsto t^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$

$f_a \in S_0^+ \Leftrightarrow \alpha(\alpha-1) - \alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha+1)(\alpha-3) = 0$

$t \mapsto t^3$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ sont dans S_{0+}, ev de dim 2,

donc $S_0^+ = \{t \mapsto \lambda t^3 + \frac{\mu}{t}, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

$$S^+ = \{t \longmapsto t^4 + \lambda t^3 + \frac{\mu}{t}, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

• De même : $S^- = \{t \mapsto t^4 + \lambda_2 t^3 + \frac{\mu_2}{t}, (\lambda_2, \mu_2) \in \mathbb{R}^2\}$

• CN | Prenons $f \in S$. $\forall t > 0, f(t) = t^4 + \lambda_1 t^3 + \frac{\mu_1}{t}$, avec $(\lambda_1, \mu_1) \in \mathbb{R}^2$

$\forall t < 0, f(t) = t^4 + \lambda_2 t^3 + \frac{\mu_2}{t}$, avec $(\lambda_2, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$

f est continue en 0, donc $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

CS | Posons $f : t \mapsto \begin{cases} t^4 + \lambda_1 t^3 & \text{si } t > 0 \\ t^4 + \lambda_2 t^3 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ f est C^2 sur $\mathbb{R}^*$, C^0 sur $\mathbb{R}$, et vérifie (E) sur $\mathbb{R}^*$.

$\forall t > 0, f'(t) = 4t^3 + 3\lambda_1 t^2$ $\quad \forall t < 0, f'(t) = 4t^3 + 3\lambda_1 t^2$ $\quad \lim_0 f' = 0$

$f''(t) = 12t^2 + 6\lambda_1 t$ $\quad f''(t) = 12t^2 + 6\lambda_1 t$ $\quad \lim_0 f'' = 0$

Par théorème de prolongement C^2, f est C^2 sur $\mathbb{R}$ et est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

(Réviser le théorème de limite de la dérivée, de prolongement C^1 et de prolongement C^k