Gestion du tableau		
Communication orale		
Connaissance du cours		
Autonomie des démarches		
Note		

$\boxed{3}$ Probabilités.

RMS

On cherche à modéliser l'évolution d'une population au fur et à mesure des générations. Pour l'individu j de la génération n, on pose $X_{j,n}$ la variable aléatoire représentant son nombre d'enfants. On suppose que les variables $X_{j,n}$ sont indépendantes et suivent une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
On pose S_n le nombre d'individus à la génération n. On suppose que $S_0 = 1$. Ainsi :

$$S_n = \sum_{j=1}^{S_{n-1}} X_{j,n-1}$$

1. Ecrire une fonction qui prend deux paramètres λ et n et qui renvoie une liste $[b_0, \dots, b_n]$ telle que b_i désigne le nombre d'individus à la génération i après une simulation du processus.
   Tracer sur une même figure les résultats obtenus pour un échantillon de 15 expériences, jusqu'à la génération $n = 30$, avec $\lambda = 0,9$. Que remarque-t-on ?
   Recommencer avec $\lambda = 1,1$. Que remarque-t-on ?
2. Montrer
   $$\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ P(S_n = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-\lambda i} \frac{(i\lambda)^k}{k!} P(S_{n-1} = i).$$
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et que $E(S_n) = \lambda E(S_{n-1}$. EN déduire le comportement asymptotique de $E(S_n)$.
4. Posons ϕ la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ et Φ_{S_n} la fonction génératrice de S_n. Montrer :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \Phi_{S_n} = \Phi_{S_{n-1}} \circ \phi$$
5. On note E l'événement "la lignée s'éteint" et on pose $u_n = P(S_n = 0)$. Prouver que la suite (u_n) converge vers $P(E)$.
6. Calculer u_0 et donner une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n).

Gestion du tableau		
Communication orale		
Connaissance du cours		
Autonomie des démarches		
Note		

$\boxed{4}$ **PP4 1**

RMS

On considère les suites de fonctions (f_n) et (g_n) définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f_0 : x \mapsto x$$

$$g_0 : x \mapsto 0$$

et, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$f_{n+1} : x \mapsto \frac{1}{2}\left(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)}\right)$$

$$g_{n+1} : x \mapsto g_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - g_n^2(x)\right)$$

1. Montrer que la suite (f_n) est bien définie et écrire une fonction python, qui calcule $f_n(x)$ pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.
2. Tracer f_{100} sur l'intervalle $]0, 10]$.
3. Tracer sur un même graphe les fonctions (g_n), pour $n \in [\![0, 10]\!]$, sur l'intervalle $]0, 10]$. Sur quel intervalle peut-on conjecturer la convergence simple de la suite (g_n) ?
4. Démontrer la conjecture précédente.
5. (a) On note $\delta_n(x) = f_n(x) - \sqrt{x}$.
   Montrer que, pour $x > 0$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers $\sqrt{x}$ et que :
   $$\delta_{n+1}(x) \sim \frac{\delta_n(x)^2}{2\sqrt{x}}$$
   quand $n \to +\infty$.

   (b) Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur [0,1].