Ex 55

- $n\{an!\} = u + \alpha_n$, avec $\alpha_n \longrightarrow 0$

$$an! = \underbrace{\lfloor an! \rfloor}_{Q_n} + \frac{u}{n} + \frac{\alpha_n}{n}$$

$$= an(n-1)!$$

$$= nQ_{n-1} + u \times \frac{n}{n-1} + \frac{n\alpha_{n-1}}{n-1}$$

$u = Q_n - nQ_{n-1} + o(1)$ donc $u \in \mathbb{Z}$ | $\boxed{\text{donc } u \in \mathbb{N}}$

- $\exists p_1 \ \forall n \geq p_1 \quad u = Q_n - nQ_{n-1}$

$$\frac{Q_n}{n!} = \frac{Q_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{u}{n!} = \frac{Q_p}{p!} + u\sum_{k=p+1}^{n} \frac{1}{k!} = r + u\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

avec $r = \frac{Q_p}{p!} - u\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \in \mathbb{Q}$

Quand $n \longrightarrow +\infty$: $\boxed{a = r + ue \text{ et } u \in \mathbb{N}.}$

-