7

Ex 30

① $x \mapsto x^\alpha$ sol de (E) $\iff \forall x>0,\ \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1} + \alpha x^\alpha - x^\alpha = 0$

$\iff \forall x>0,\ \alpha(\alpha-1) + (\alpha-1)x = 0$

$\iff \alpha = 1.$

② $G'(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^2} > 0$, G est strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t^2}\,dt > 0$ $\left(\dfrac{e^{-t}}{t^2} = o(e^{-t})\right.$ donc int. en $\left.+\infty\right)$

$\lim_{x\to 0^+} G(x) = -\infty$ $\left(\dfrac{e^{-t}}{t^2} \underset{t\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^2}\right.$ non int en 0^+ et positive

$\left.\int_x^1 \dfrac{e^{-t}\,dt}{t^2} \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty\right)$

③ $y = xz$.

Pour $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ 2 fois dérivable : on pose $z : x \mapsto \dfrac{y(x)}{x}$.

$y(x) = xz(x)$
$y'(x) = z(x) + xz'(x)$
$y''(x) = 2z'(x) + xz''(x)$

$xy''(x) + xy'(x) - y(x) = x^2 z''(x) + (2x + x^2)z'(x) = 0$

y sol de (E) $\iff z'$ sol de $xZ' + (2+x)Z = 0$

$\iff z' : x \mapsto \lambda e^{-2\ln x - x} = \lambda \dfrac{e^{-x}}{x^2}$

$\iff z : x \mapsto \lambda G(x) + \mu$

$\iff y : x \mapsto \lambda x G(x) + \mu x$

④ • $y(x) = x(\lambda G(x) + \mu) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$ $\left(\text{du signe de } \lambda \int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t^2} + \mu\right)$

• $\forall t \in [x,1]$, $\dfrac{1-t}{t^2} \leq \dfrac{e^{-t}}{t^2} \leq e^{-x}$

Pour $x \in]0,1]$ $\int_x^1 \dfrac{1}{t^2} - \int_x^1 \dfrac{dt}{t} \leq \int_x^1 \dfrac{e^{-t}}{t^2}\,dt \leq e^{-x}\int_x^1 \dfrac{dt}{t^2} = e^{-x}\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$

$= \dfrac{1}{x} - 1 + \ln x$

$e^{-x}(x-1) \leq x G(x) \leq -1 + x - x\ln x$

$\lim_{x\to0^+} xG(x) = -1$

$\lim_{x\to0^+} y(x) = -\lambda.$