Ex 31 ① ⓐ Pour $k \in [\![0,n]\!]$:

$$\varphi(X^k) = X^n \times \frac{1}{X^k} = X^{n-k} \in \mathbb{R}_n[X]$$

• φ est

De plus : φ est linéaire,

donc $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) = \varphi(\mathrm{vect}(1,\dots,X^n)) \subset \mathbb{R}_n[X]$

$\boxed{\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])}$

ⓑ $\boxed{\text{Met 1 :}}$ $(\varphi(X^k))_{0\leq k\leq n} = (X^{n-k})_{0\leq k\leq n} = (X^k)_{0\leq k\leq n}$ est 1 base de $\mathbb{R}_n[X]$,

donc $\boxed{\varphi \in GL(\mathbb{R}_n[X])}$

$\boxed{\text{Met 2}}$ $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $(\varphi\circ\varphi)(X^k) = X^{n-(n-k)} = X^k$,

$\varphi\circ\varphi = id_{\mathbb{R}_n[X]}$

φ est une symétrie, donc $\boxed{\varphi \in GL(\mathbb{R}_n[X])}$

ⓒ $\boxed{\text{Met 2}}$ φ est une symétrie, donc $\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable}}$

et $Sp(\varphi) \subset \{-1;1\}$

$\boxed{\text{Met 1}}$ $\underset{(1,\dots,X^n)}{\mathrm{mat}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \diagup & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, donc $\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable}}$

BON de $\mathbb{R}_n[X]$

ⓓ Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$

$P \in \mathrm{Ker}(\varphi - id_E) \Leftrightarrow \varphi(P) = P$

$\Leftrightarrow \sum a_k X^{n-k} = \sum a_k X^k$

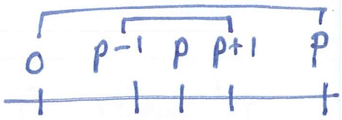
$\Leftrightarrow \sum a_{n-k} X^k = \sum a_k X^k$

$\Leftrightarrow \forall k \in [\![0,n]\!],\ a_k = a_{n-k}$.

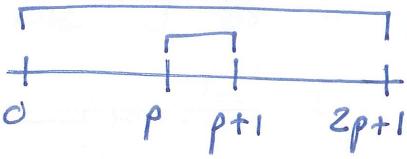
$\Leftrightarrow X \in \mathrm{vect}(X^k + X^{n-k})_{0\leq k\leq n}$.

$\mathrm{Ker}(\varphi - id_E) = \mathrm{vect}(X^k + X^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$

$= \mathrm{vect}(X^k + X^{n-k})$ $\begin{array}{l} 0 \leq k \leq p \text{ si } n = 2p \\ 0 \leq k \leq p \text{ si } n = 2p+1 \end{array}$



$= \mathrm{vect}(X^k + X^{n-k})_{0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$



base de $\mathrm{Ker}(\varphi - id_E)$, dimension $p+1 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

$= \mathrm{vect}(1+X^4, X+X^3, X^2)$ si $n = 4$

$P \in \mathrm{Ker}(\varphi + id_E) \Leftrightarrow \forall k \in [\![0,n]\!],\ a_k = -a_{n-k}$

$\Leftrightarrow P \in \mathrm{vect}(X^k - X^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$

$\mathrm{Ker}(\varphi + id_E) = \mathrm{vect}(X^k - X^{n-k})$ $\begin{array}{l} 0 \leq k \leq p-1 \text{ si } n = 2p \\ 0 \leq k \leq p \text{ si } n = 2p+1 \end{array}$

$= \mathrm{vect}(1 - X^4, X - X^3)$ si $n = 4$

base de $\mathrm{Ker}(\varphi - id_E)$,

dimension $\left.\begin{array}{l} p \text{ si } n = 2p \\ p+1 \text{ si } n = 2p+1 \end{array}\right| \rightarrow \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$

---

② • Pour $x > 0$: $t \longmapsto f(t,x) = \dfrac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

En 0^+ : $\dfrac{e^{-t} - e^{-tx}}{t} = \dfrac{1 - t - (1 - tx) + o(t)}{t} = x + o(1) \xrightarrow[t \to 0^+]{} x$

$t \longmapsto f(t,x)$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$ ($\int$ faussement impropre en 0.

En $+\infty$: $f(t,x) \overset{(\dots)}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc $(\dots)$ $t \longmapsto f(t,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$

• Pour $t > 0$: $x \longmapsto f(t,x)$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$: $x \longmapsto \dfrac{-(-t)e^{-tx}}{t} = e^{-tx}$.

Pour $t > 0$ et $x \geq a > 0$: $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| = e^{-tx} \leq e^{-ta} = \varphi(t)$

φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ $(a > 0)$.

(Pour $x > 0$, $t \longmapsto f(t,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

$t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$)

D'après le théorème de dérivation :

F est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

et $F' : x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \left[-\frac{1}{x}e^{-tx}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$

- $F : x \longmapsto \ln x + F(1) = \ln x.$
- $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tb} - e^{-ta}}{t}\,dt = F(a) - F(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

Ex 32 1) a) • Prenons $X \in \mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(A)$

$X = AY$, avec $Y \in K^n$

$AX = A^2Y = 0$, donc $Y \in \mathrm{Ke}$

$Y \in \mathrm{Ker}\, A^2$

Or $\mathrm{Ker}\, A \subset \mathrm{Ker}\, A^2$, et $\dim \mathrm{Ker}\, A = \dim \mathrm{Ker}\, A^2$, donc $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, A^2$

$Y \in \mathrm{Ker}\, A$, donc $X = 0$

$\mathrm{Ker}\, A \cap \mathrm{Im}(A) = \{0\}$

D'après le théorème du rang : $\mathrm{Ker}\, A \oplus \mathrm{Im}(A) = K^n$

• Rem : $\mathrm{rg}\, A^2 = \mathrm{rg}\, A \iff \mathrm{Im}\, A^2 = \mathrm{Im}\, A \iff \mathrm{Ker}\, A^2 = \mathrm{Ker}\, A$
$\iff \mathrm{Ker}\, A \oplus \mathrm{Im}\, A = K^n$.

• Disposons de $\mathcal{B}$ une base de K^n adaptée à la décomposition
$K^n = \mathrm{Ker}\, A \oplus \mathrm{Im}\, A$

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(A) = \begin{array}{c|c} & \overbrace{}^{r} \\ r & \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$

($\mathcal{B}_1$ base de $\mathrm{Im}\, A$, $\mathcal{B}_2$ base de $\mathrm{Ker}\, A$)

car $\mathrm{Im}\, A$ est stable par A

De plus : $C = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_1}(A_{\mathrm{Im}\, A}) \in \mathcal{M}_r(K)$

↳ endomorphisme induit par A sur $\mathrm{Im}\, A$

$\mathrm{Ker}(A_{\mathrm{Im}\, A}) = \mathrm{Im}\, A \cap \mathrm{Ker}\, A = \{0\}$

$A_{\mathrm{Im}\, A}$ est injectif, donc bijectif, donc $C \in GL_r(K)$

$$\boxed{A = P^{-1}\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P, \quad \text{avec } P \in GL_n(K)}$$

(b) • Supposons que A admet un pseudo-inverse.

$A = \underbrace{AB}_{BA}A = BA^2$ donc $\text{rg}A \leqslant \text{rg}A^2$

Or $\text{rg}A^2 \leqslant \text{rg}A$, donc $\text{rg}A^2 = \text{rg}A$.

• Supposons $\text{rg}A^2 = \text{rg}A$.

$A = P^{-1}\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P$, avec $C \in GL_r(K)$, $P \in GL_n(K)$

Posons $B = P^{-1}\begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P \in \mathcal{M}_n(K)$

$AB = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P = BA$

$ABA = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P = A$

$BAB = B$.

---

(2) Posons $v_n = n^\alpha u_n$.

$\ln v_{n+1} - \ln v_n = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

$= \alpha\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \left(-\frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\sum \ln v_{n+1} - \ln v_n$ converge

donc $(\ln v_n)$ converge vers $a \in \mathbb{R}$

(v_n) converge vers $\lambda = e^a > 0$

$u_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}$
