Ex 1

- $f : x \longmapsto \frac{\ln x}{x}$ est continue et $\downarrow$ sur $[3, +\infty[$. (...)

- 1er essai :

Pour $k \geqslant 3$:

$$f(k) \leqslant \int_k^{k+1} f \leqslant f(k+1)$$

$$\int_{k-1}^{k} f \leqslant f(k) \leqslant \int_k^{k+1} f$$

$(k \geqslant 4)$ $(k \geqslant 3)$

$$f(2) + f(3) + \int_3^n f \leqslant S_n \leqslant f(2) + \int_3^{n+1} f$$

$$\underbrace{\frac{\ln^2 2}{2} + \frac{\ln^2 3}{2} + \frac{\ln^2 n}{2} - \frac{\ln^2 3}{2}}_{\sim \frac{\ln^2 n}{2}} \leqslant S_n \leqslant \underbrace{\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2 3}{2}}_{\sim \frac{\ln^2(n+1)}{2}}$$

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} = \frac{\left[\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^2}{2}$$

$$= \underbrace{\ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to 0} + \frac{\ln^2(n)}{2} + \underbrace{\ln(n) \times \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\sim \frac{\ln n}{n} \text{ donc } \to 0}$$

$$\sim \frac{\ln^2(n)}{2}$$

Par encadrement :

$$S_n \sim \frac{\ln^2 n}{2}$$

$$S_n = \frac{\ln^2 n}{2} + O(1)$$

- Cours : Comparaison des SATP.
  Comparaison Série - Intégrale.
  (u_n) Converge $\Leftrightarrow$ $\sum u_{n+1} - u_n$ Converge

• 2ème essai :

Posons $u_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}$

$$u_{n+1} - u_n = S_{n+1} - S_n - \frac{\ln^2(n+1)}{2} + \frac{\ln^2(n)}{2}$$

$$= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln^2(n+1)}{2} + \frac{\ln^2(n)}{2}$$

Compliqué.

$$= \frac{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} - \frac{\left(\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})\right)^2}{2} + \frac{\ln^2(n)}{2} \quad (*)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\ln n + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \times \left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\ln(n) + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 + \frac{\ln^2(n)}{2}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\ln n - \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\ln^2(n) + 2\frac{\ln(n)}{n} + O\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)\right) + \frac{\ln^2(n)}{2}$$

$$= \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln^2(n)}{n^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) - \frac{\ln(n)}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

$$= -\frac{\ln^2(n)}{n^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \sim -\frac{\ln^2(n)}{n^2}$$

• 3ème essai : on part de $(*)$: (calcul + simple)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\ln n}{n+1} + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n+1} - \frac{\ln^2(n)}{2} - \ln(n) \times \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{\ln^2(n)}{2}$$

$$= \frac{\ln n}{n+1} - \ln(n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \underbrace{\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n+1}}_{\sim 1/n^2}$$

$$= \frac{\ln n}{n(1+\frac{1}{n})} - \ln(n)\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n+1}$$

$$= \frac{\ln n}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \ln(n)\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \underbrace{\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n+1}}_{= O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)}$$