Ex 48

(1) • $N(f) \geq 0$, $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$, $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$

• Pour $f \in E$:

$N(f) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f + f'' = 0 \\ f(0) = f'(0) = 0 \end{cases} \rightarrow f = 0$ (Pb de Cauchy d'ordre 2)

(2) • Le pb. de Cauchy (*) admet une unique solution.

• Posons $f : x \longmapsto \int_0^x \sin(x-t) g(t)\,dt = \sin(x) \underbrace{\int_0^x \cos . g}_{C^1} - \cos(x) \underbrace{\int_0^x \sin . g}_{C^1 \text{ car } g\ C^0}$

f est C^1. $f(0) = 0$.

$f'(x) = \sin(x)\cos(x) g(x) + \cos(x) \int_0^x \cos . g - \cos(x)\sin(x) g(x) + \sin(x) \int_0^x \sin . g$

$= \cos(x) \int_0^x \cos . g + \sin(x) \int_0^x \sin . g$ f' est C^1 donc f est C^2

$f'(0) = 0$.

$$f''(x) = \cos^2(x)\, g(x) - \sin(x)\int_0^x \cos . g + \sin^2(x)\, g(x) + \cos(x)\int_0^x \sin . g$$
$$= g(x) - f(x)$$

$\boxed{f \text{ est solution du pb. de Cauchy } (*)}$

③ • $N'(\lambda f) = |\lambda|\, f$, $N'(f) \geq 0$, $N'(f+g) \leq N'(f) + N'(g)$.

• $N'(f) = 0 \Rightarrow \|f\|_\infty = \|f''\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0$

• Pour $f \in E$:

□ $N(f) = \|f + f''\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f''\|_\infty = N'(f)$

□ Posons $g = f + f''$.

D'après la ② :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = \left|\int_0^x \sin(x-t)\, g(t)\, dt\right| \leq \left|\int_0^x |g(t)|\, dt\right| \leq |x| \times \|g\|_\infty$
$\leq \pi \|g\|_\infty$
$= \pi N(f)$

donc $\|f\|_\infty \leq \pi N(f)$

De plus : $\|f''\|_\infty = \|g - f\|_\infty \leq \|g\|_\infty + \|f\|_\infty \leq (1+\pi) N(f)$

$N'(f) = \|f\|_\infty + \|f''\|_\infty \leq (1+2\pi) N(f)$

N et N' sont équivalentes.

① Cours. Ex 46

② Pour $\lambda \in Sp A \cup Sp B$: posons $\omega_A(\lambda)$ l'ordre de λ dans χ_A

$\omega_B(\lambda)$ ———— χ_B

$$\left(\begin{array}{l}\omega_\lambda(A) = 0 \iff \lambda \notin Sp(A) \\ \omega_\lambda(B) = 0 \iff \lambda \notin Sp(B)\end{array}\right)$$

$\boxed{\text{Méthode 1}}$ Pour $k \in \mathbb{N}$:

$Sp(A^k) = \{\lambda^k, \lambda \in Sp(A)\}$.

$$tr(A^k) = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \omega_\lambda(A) \times \lambda^k = \sum_{\lambda \in Sp A \cup Sp B} \omega_\lambda(A) \times \lambda^k$$

$$tr(A^k) - tr(B^k) = \sum_{\lambda \in Sp A \cup Sp B} (\omega_\lambda(A) - \omega_\lambda(B)) \lambda^k = 0$$

$(\omega_\lambda(A) - \omega_\lambda(B))_{\lambda \in Sp A \cup Sp B}$ sont solutions du système homogène

de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_p \\ \vdots & & \\ \lambda_1^{p-1} & \cdots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix} = (\lambda_i^{j-1})_{1 \leq i,j \leq p} = V(\lambda_1, \dots, \lambda_p)^T$

en posant $Sp A \cup Sp B = \{\lambda_1; \dots; \lambda_p\}$, avec $\lambda_1 < \dots < \lambda_p$.

$M \in GL_p(\mathbb{R})$, donc le système a pour unique solution $0_{\mathbb{R}^p}$

$\forall \lambda \in Sp(A) \cup Sp(B)$, $\omega_\lambda(A) = \omega_\lambda(B)$

$\chi_A = \chi_B$

Méthode 2 • Pour $P \in \mathbb{R}[X]$: $\mathrm{tr}(P(A)) = \mathrm{tr}(Q(A))$

Posons $A = QTQ^{-1}$, avec $(T, T') \in T_n^+(\mathbb{R})^2$

$B = Q'T'Q'^{-1}$ $\quad (Q, Q') \in GL_n(\mathbb{R})^2$

$$\mathrm{tr}(P(T)) = \mathrm{tr}(P(T'))$$

Les coefficients diagonaux de $P(T)$ sont les valeurs propres de A

les valeurs propres $\left|\begin{array}{l} \text{de } A, \text{ comptées avec leur ordre } \omega_A(\lambda) \text{ dans } \chi_A \\ \text{de } A \text{ ou de } B, \text{ ———————— .} \end{array}\right.$

• Prenons $\lambda_0 \in Sp(A) \cup Sp(B)$.

Posons $P = (X - \lambda_0 + 1) \times \prod\limits_{\lambda \in (Sp A \cup Sp B) \setminus \{\lambda_0\}} (X - \lambda)$ $\quad \left(\begin{array}{l} P(\lambda_0) = 1 \\ \forall \lambda \in (Sp A \cup Sp B) \setminus \{\lambda_0\}, \ P(\lambda) = 0 \end{array} \right)$

$(P(T), P(T')) \in T_n^+(\mathbb{R})$

les coefficients diagonaux de $P(T)$ sont 1 à l'ordre $\omega_A(\lambda_0)$, et 0.

$P(T')$ ———————— $\omega_B(\lambda_0)$, et 0.

$\left. \begin{array}{l} \mathrm{tr}\, P(T) = \omega_A(\lambda_0) \\ \mathrm{tr}\, P(T') = \omega_B(\lambda_0) \end{array} \right|$ donc $\omega_A(\lambda_0) = \omega_B(\lambda_0)$

$$\boxed{\chi_A = \chi_B}$$

$\boxed{\text{Méthode 3}}$ Posons $Sp(A) = \{\lambda_1 ; \dots ; \lambda_p\}$ avec $\lambda_1 < \dots < \lambda_p$.

$$f_A(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{tr}(A^k) x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^{p} \omega_A(\lambda_i) \lambda_i^k x^k$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \omega_A(\lambda_i) (\lambda_i x)^k \longrightarrow \text{La famille est sommable pour } x \in \left]-\frac{1}{\alpha} ; \frac{1}{\alpha}\right[$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \omega_A(\lambda_i) \times \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda_i x)^k$$

en posant $\alpha = \max\limits_{\lambda \in SpA \cup SpB} |\lambda|$

(on suppose $\alpha > 0$)

$$= \sum_{i=1}^{p} \omega_A(\lambda_i) \times \frac{1}{1 - \lambda_i x}.$$

Unique décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $f_A(x)$

• Or : $\forall x \in \left]-\frac{1}{\alpha} , \frac{1}{\alpha}\right[$, $f_A(x) = f_B(x)$

donc : $SpA = SpB$.

et : $\forall \lambda \in SpA = SpB$, $\omega_A(\lambda) = \omega_B(\lambda)$

$\boxed{\chi_A = \chi_B}$

• Cas particulier : Supposons $\alpha = 0$.

$Sp_{\mathbb{C}}(A) = Sp_{\mathbb{C}}(B) = \{0\}$ $\boxed{\chi_A = \chi_B = X^n}$

---

② • $x \longmapsto \dfrac{x^n}{\ln(1-x)}$ est continue sur $]0, 1]$

$$\frac{x^n}{\ln(1-x)} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^n}{-x} = -x^{n-1} \sim \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{ssi } n = 0 \\ -1 & \text{ssi } n \geq 1 \end{cases}$$

I_n existe ssi $n \geq 1$ (fonction prolongeable sur $[0,1]$ par continuité)