

Devoir de révisions de PCSI

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants qui permettent de réviser le programme de première année et, ainsi, de bien commencer la deuxième. Il est à rendre pour le jour de la rentrée.

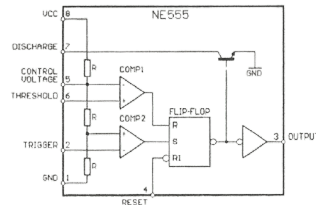
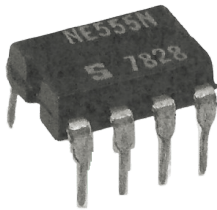
I. Électronique relaxante

Un oscillateur à relaxation utilise des composants non linéaires permettant la génération de signaux périodiques à partir d'une alimentation continue. Les lampes à décharge et tubes à néon ont été les premiers oscillateurs électroniques à relaxation. Des composants intégrés, comme le NE555¹, ou des circuits à base d'amplificateurs opérationnels (ou ALI, Amplificateur Linéaire Intégré), offrent une plus grande stabilité et ouvrent la voie à de multiples applications. On se propose d'étudier le principe d'un oscillateur à relaxation.

On considère le montage ci-après, couramment appelé multivibrateur astable, constitué d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C reliés à un quadripôle astable conçu à l'aide d'un circuit intégré NE555 ou d'un amplificateur linéaire

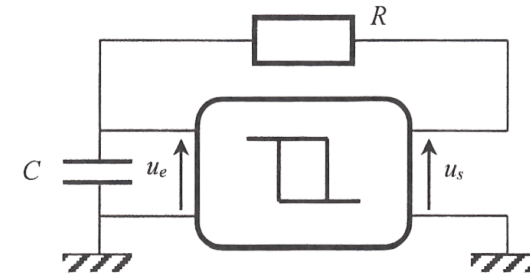
1. Le circuit intégré NE555 d'après « www.wikipedia.fr »

Le circuit intégré NE555 (plus couramment nommé 555) est utilisé dans une variété d'applications de minuterie, de retard, de génération d'impulsions et d'oscillateur. Les produits dérivés fournissent deux (556) ou quatre (558) circuits de synchronisation dans un seul boîtier. Le NE555 peut fonctionner selon trois modes : monostable, astable ou bistable. Plus d'un milliard de 555 sont produits chaque année selon certaines estimations et on dit qu'il s'agit "probablement du circuit intégré le plus populaire jamais réalisé". [...] Selon le fabricant, le boîtier standard NE555 comprend 25 transistors, 2 diodes et 15 résistances sur une puce de silicium installée dans un boîtier double en ligne à 8 broches (DIP-8). [...] En mode astable, le 555 peut fonctionner comme un oscillateur électronique. Les utilisations incluent les clignotants de LED et de lampe, la génération d'impulsions, les horloges logiques, la génération de tonalités, les alarmes de sécurité, la modulation de position d'impulsion, etc.



Circuit intégré NE555 dans un boîtier DIP à 8 broches et son schéma fonctionnel interne (Cliché : Stefan506 Licence CC)

intégré, alimenté en continu par une source non représentée :



Le circuit astable a une impédance d'entrée infinie et a été réglé pour fonctionner de la manière suivante à partir de tensions de référence V_0 , V_1 et V_2 internes au circuit :

- lorsque la tension d'entrée u_e est inférieure à la tension de déclenchement V_1 , la tension de sortie u_s vaut V_0 ;
- lorsque la tension d'entrée u_e est supérieure à la tension de déclenchement V_2 (avec $V_2 > V_1$), la tension de sortie u_s vaut $-V_0$;
- lorsque la tension d'entrée u_e est comprise entre V_1 et V_2 , la tension de sortie u_s conserve sa valeur.

Le condensateur est initialement déchargé et on suppose que la tension de sortie u_s vaut V_0 .

- 1) Quelle est la conséquence d'une impédance d'entrée infinie du montage astable ?
- 2) Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_e aux bornes du condensateur et déterminer l'expression de $u_e(t)$.
- 3) Montrer que le circuit astable bascule à l'instant t_b que l'on exprimera en fonction des données.
- 4) En déduire que le montage est le siège d'oscillations périodiques dont on déterminera la période T .

On souhaite simuler numériquement le comportement du montage en Python.

- 5) Exprimer $\frac{du_e}{dt}$ en fonction de u_e , u_s , R et C .

Montrer que l'on peut alors connaître $u_e(t + dt)$ à l'instant $t + dt$ à partir des caractéristiques du montage à l'instant t . Quel est le nom de cette méthode d'intégration numérique ?

On définit la variable booléenne `etat` précisant l'état du circuit astable à un instant donné : `etat` vaut `True` lorsque la tension de sortie vaut V_0 et `False` lorsque celle-ci vaut $-V_0$

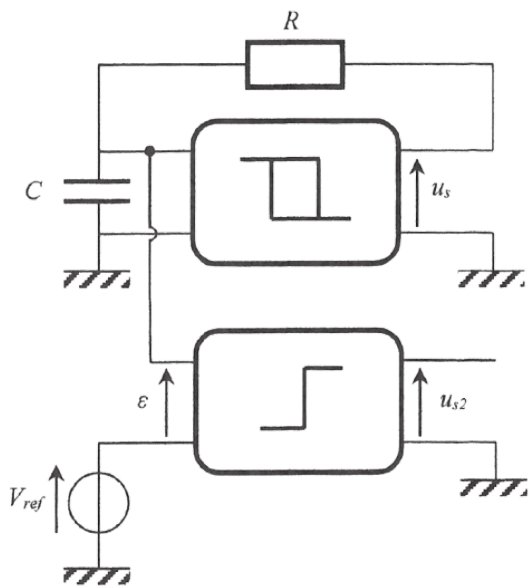
- 6) Écrire la fonction d'entête `def sortie_astable(ue, etat)`: renvoyant à la fois la tension de sortie u_s du circuit astable pour une valeur donnée de la tension d'entrée u_e et un état donné du circuit, ainsi que la nouvelle valeur de l'état du circuit (`True` ou `False`).

On souhaite calculer numériquement $u_e(t)$ et $u_s(t)$ sur une durée d'expérience $t_{\max}$ à partir de l'instant initial.

- 7) Proposer des valeurs numériques pertinentes pour $t_{\max}$ et pour le pas de calcul dt .
- 8) Écrire la boucle principale de remplissage des tableaux t , u_e et u_s contenant respectivement les différents instants et les valeurs prises par les tensions d'entrée et de sortie au cours de l'expérience.
- 9) En déduire le tracé de $u_e(t)$ et $u_s(t)$ en fonction du temps. Commenter la forme des signaux obtenus.

Mesurer la période des oscillations et comparer au résultat théorique obtenu précédemment.

On complète le circuit précédent en introduisant un montage comparateur simple (le comparateur simple a également une impédance d'entrée infinie) et un générateur de tension imposant une tension de référence V_{ref} .



Lorsque $\epsilon > 0$, le comparateur simple fournit la tension $u_{s2} = V_0$ et lorsque $\epsilon < 0$, $u_{s2} = -V_0$.

- 10) Écrire la fonction d'entête `def sortie_comparateur(epsilon)`: renvoyant la valeur de u_{s2} selon la valeur de la tension epsilon à l'entrée du comparateur.

- 11) Compléter le programme précédent afin de calculer, puis de tracer la tension u_{s2} au cours du temps pour $V_{\text{ref}} = -3 \text{ V}$, 0 V et 4 V . Commenter la forme des signaux ainsi obtenus.

Ce montage, combinant multivibrateur astable et comparateur simple, pourra être utilisé pour commander un transistor en commutation afin d'alimenter un circuit de puissance, comme un moteur à courant continu par exemple.

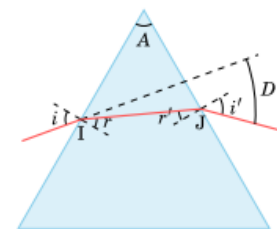
Données : $C = 100 \text{ nF}$, $R = 2,2 \text{ k}\Omega$, $V_0 = 10 \text{ V}$ et $V_1 = -\frac{1}{2}V_0 = -V_2$.

II. Lentille de FRESNEL

La lentille de FRESNEL fut inventée par Augustin FRESNEL pour équiper les phares de signalisation marine, elle est aussi utilisée à l'arrière des bus. Par rapport à une lentille standard, la lentille de FRESNEL présente l'intérêt d'être plus légère et de réduire la quantité de verre à utiliser lors de sa conception.



- 1) Avant de procéder à l'étude d'une telle lentille, on va d'abord s'intéresser à un simple prisme d'indice n et d'angle au sommet A . On note les angles d'incidence et de réfraction i , r , r' et i' dans la figure ci-dessous.



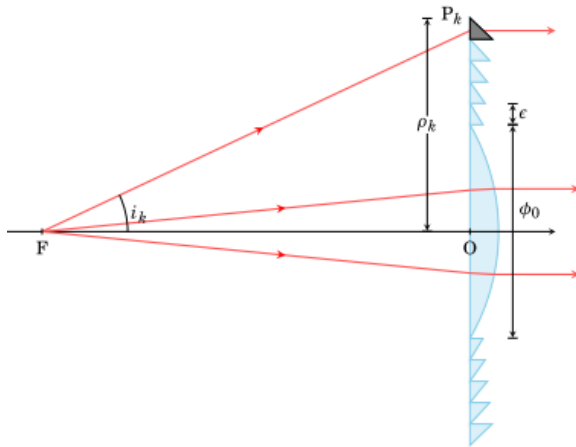
Donner les lois de réfraction pour chacune des deux faces, ainsi que la relation entre r , r' et A .

- 2) Exprimer l'angle de déviation D en fonction de i , i' et A .

La lentille de FRESNEL est un système optique de révolution comportant au centre une lentille plan-convexe (L) de diamètre ϕ_0 et de distance focale f' , entourée de N anneaux prismatiques. Chaque prisme P_k ($k = 1, \dots, N$) est caractérisé par son angle au sommet A_k situé à la distance ρ_k de l'axe optique telle que

$$\rho_k = \frac{\phi_0}{2} + k\epsilon \quad \text{avec} \quad \epsilon = C^{\text{te}}$$

La face d'entrée des prismes est perpendiculaire à l'axe optique.



- 3) Calculer la constante ϵ sachant que la lentille de FRESNEL contient $N = 10$ anneaux prismatiques, que son diamètre vaut $\phi = 15$ cm et que celui de la lentille (L) vaut $\phi_0 = 5,0$ cm.
- 4) Par construction, tout rayon issu du foyer objet F de (L) doit ressortir parallèlement à l'axe optique. En déduire l'expression de la déviation D_k à la traversée du prisme P_k en fonction de l'angle d'incidence i_k du rayon sur la face d'entrée. On supposera que ϵ est suffisamment petit pour que l'angle i_k soit le même pour tous les rayons incidents sur un prisme donné.
- 5) En utilisant les lois de réfraction établies précédemment, montrer que l'angle au sommet A_k est donné par

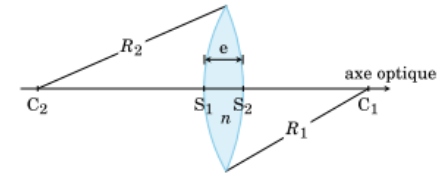
$$\tan A_k = \frac{\sin i_k}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_k} - 1}$$

- 6) Exprimer $\sin i_k$ en fonction de ρ_k et f' .

Indication : I étant le point d'entrée du rayon incident dans le prisme P_k , on assimilera la distance OI à ρ_k .

- 7) Calculer les angles i_1, i_{10}, A_1 et A_{10} sachant que $n = 1,5$ et $f' = 10$ cm.
- 8) On montre que la focale f' d'une lentille mince s'exprime en fonction de n et des rayons de courbure :

$$\frac{1}{f'} = (n - 1) \left(\frac{1}{S_1 C_1} - \frac{1}{S_2 C_2} \right)$$

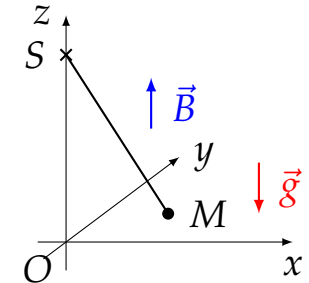


En déduire le rayon de courbure R de la face sphérique de la lentille plan-convexe (L) en fonction de l'indice n et de sa distance focale image f' . Calculer R .

- 9) Calculer l'épaisseur e de la lentille plan-convexe (L).
- 10) Comparer l'épaisseur e à l'épaisseur e' d'une lentille **bi-convexe symétrique** de diamètre ϕ et de focale f' . Conclure.

III. Pendule de FOUCAULT magnétique

Un pendule est constitué d'un fil inextensible et sans masse de longueur $\ell = SO = SM$, à l'extrémité duquel est accroché une petite boule assimilée à un point matériel de masse m et de charge électrique q . Ce pendule est plongé dans un champ magnétique uniforme et permanent $\vec{B} = B\vec{u}_z$. On se limite à l'étude des petites oscillations au voisinage du point O , ce qui permet d'écrire : $\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$.



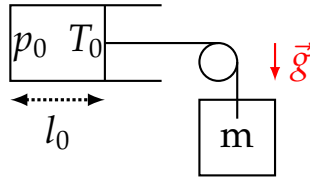
Le pendule est légèrement écarté selon l'axe Ox ($\vec{OM}(t_0) = a\vec{u}_x$) et lâché avec une vitesse initiale nulle.

Quelle devrait être la valeur de B pour que la masse repasse au point de départ au bout de $N = 10$ oscillations ?

On introduira la pulsation ω_0 du pendule simple (sans champ magnétique) ainsi que la pulsation cyclotron Ω_c , en supposant $\Omega_c \ll \omega_0$ pour alléger les calculs.

IV. Cylindre, piston, poulie et masse

Le cylindre horizontal contient n moles d'un gaz parfait monoatomique. Il est fermé par un piston de section S relié par un fil et une poulie à une masse m qui se déplace verticalement.



Initialement, on soutient la masse m de telle sorte que le fil n'est pas tendu et le système est en équilibre à la pression p_0 et à la température T_0 . Lorsqu'on lâche la masse m , on constate qu'un équilibre s'établit rapidement avec une course du piston l_1 et une température T_1 . Puis au bout d'un temps long, un nouvel équilibre s'établit avec une course du piston l_2 et une température T_2 .

- 1) Exprimer T_1, l_1, T_2, l_2 en fonction des données et les calculer sachant que $p_0 = 1 \text{ bar}$, $T_0 = 300 \text{ K}$, $S = 1 \text{ cm}^2$, $m = 0,5 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $l_0 = 10 \text{ cm}$.
- 2) Calculer l'entropie créée lors de chacune des phases. On donne

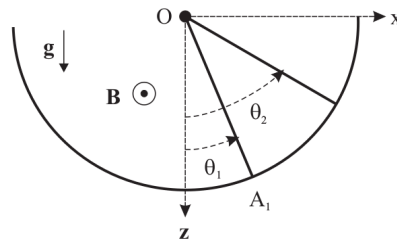
$$\Delta S = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) - nR \ln \left(\frac{p_f}{p_i} \right)$$

V. Pendules couplés par induction

Les barres OA_1 et OA_2 , de masse m , de longueur a et de résistance R peuvent tourner sans frottements autour de l'axe horizontal fixe Oy avec un moment d'inertie $ma^2/3$.

Leurs extrémités A_1 et A_2 sont en contact électrique avec une piste circulaire (C) de rayon a dont on néglige la résistance. Le tout est plongé dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = g \vec{u}_z$ et dans un champ magnétique $\vec{B} = B \vec{u}_y$ uniforme et stationnaire.

Initialement on abandonne les barres sans vitesse initiale avec $\theta_1(t = 0) = 0$ et $\theta_2(t = 0) = \theta_0$.



- 2) Établir les équations différentielles dont sont solutions $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.
- 3) Résoudre dans l'approximation des petits angles.

- 1) Décrire qualitativement l'évolution du système. Prévoir le régime de fonctionnement pour $t \rightarrow \infty$.