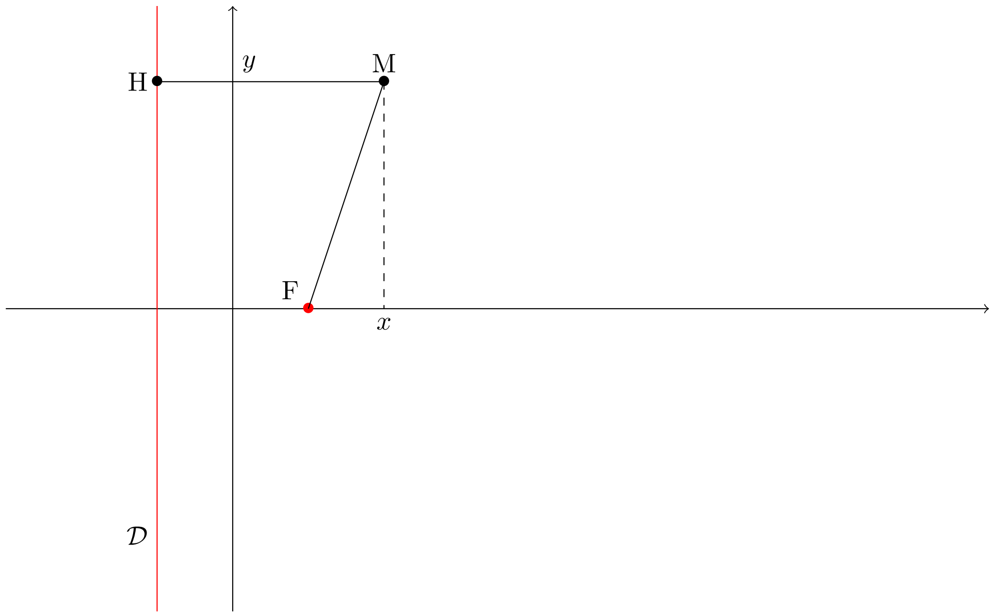
Exercice 1. (*) Soit $p > 0$. On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y^2 = 2px$. Le point $\mathrm{F} = (p/2, 0)$ est *le foyer* de cette parabole. La droite d'équation $x = -p/2$ est *la directrice* de cette parabole, notée $\mathcal{D}$.

a. Montrer que la parabole $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points du plan équidistants de F et de $\mathcal{D}$.

b. Soit M un point de la parabole $\mathcal{P}$. Montrer que la tangente à $\mathcal{P}$ au point M est la médiatrice du segment [HF], où H est le projeté orthogonal du point M sur la droite $\mathcal{D}$.

Solution de l'exercice 1. a. Soit $\mathrm{M}(x, y)$ un point du plan. Son projeté orthogonal sur la droite $\mathcal{D}$ est le point $\mathrm{H}(-p/2, y)$.



Les vecteurs qui nous intéressent sont

$$\overrightarrow{\mathrm{HM}} = (x + p/2, 0) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{FM}} = (x - p/2, y).$$

On obtient donc

$$d(\mathrm{M}, \mathcal{D})^2 = \mathrm{HM}^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

et

$$\mathrm{FM}^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2,$$

ce qui donne l'équivalence

$$d(\mathrm{M}, \mathcal{D})^2 = \mathrm{FM}^2 \iff x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 \iff 2px = y^2.$$

La parabole $\mathcal{P}$ est donc l'ensemble des points équidistants de F et de $\mathcal{D}$.

---

b. *Première méthode : avec un paramétrage.* La parabole admet le paramétrage

$$x(t) = \frac{t^2}{2p}, \quad y(t) = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Le vecteur vitesse est alors donné par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (x'(t), y'(t)) = \left(\frac{t}{p}, 1\right) \neq \vec{0}.$$

En particulier, tout point de la parabole est régulier. Notons $\mathcal{T}_t$ la tangente à $\mathcal{P}$ au point $(x(t), y(t))$ (point noté $\gamma(t)$). On sait que cette tangente est dirigée par le vecteur vitesse $\gamma'(t)$.

Notons $\mathrm{H}(t)$ le projeté orthogonal de $\gamma(t)$ sur la directrice $\mathcal{D}$ et $\mathrm{I}(t)$ le milieu du segment $[\mathrm{H}(t)\mathrm{F}]$. Ces points ont les coordonnées suivantes

$$\mathrm{H}(t) = \left(-\frac{p}{2}, t\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{I}(t) = \left(0, \frac{t}{2}\right).$$

On en déduit les vecteurs suivants

$$\overrightarrow{\mathrm{H}(t)\mathrm{F}} = (p, -t) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{I}(t)\mathrm{M}(t)} = \left(\frac{t^2}{2p}, \frac{t}{2}\right).$$

On observe que ces deux vecteurs sont orthogonaux. La droite $(\mathrm{I}(t)\mathrm{M}(t))$ est perpendiculaire à $(\mathrm{H}(t)\mathrm{F})$ est passe par le milieu du segment $[\mathrm{H}(t)\mathrm{F}]$ donc c'est la médiatrice de ce segment.

On observe aussi que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{I}(t)\mathrm{M}(t)}$ est colinéaire à $\gamma'(t)$. La droite $(\mathrm{I}(t)\mathrm{M}(t))$ est donc parallèle à la tangente $\mathcal{T}_t$. Ces deux droites passent par le point $\mathrm{M}(t)$ donc elles sont confondues.

Deuxième méthode : la parabole est une ligne de niveau d'une fonction. Introduisons la fonction

$$f : (x, y) \mapsto y^2 - 2px.$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, avec

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x, y) = (-2p, 2y) \neq 0.$$

La parabole $\mathcal{P}$ est une ligne de niveau de la fonction f. Le gradient de f ne s'annule en aucun point de $\mathcal{P}$ donc tout point de $\mathcal{P}$ est régulier et pour tout point $\mathrm{M}(x, y)$ de $\mathcal{P}$, la tangente à $\mathcal{P}$ en M est perpendiculaire au vecteur $\nabla f(x, y)$.

Soit $\mathrm{M}(x, y) \in \mathcal{P}$. Notons de nouveau H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. Notons I le milieu du segment [HF].

Déjà, les points I et M sont équidistants de H et de F donc ils sont sur la médiatrice de [HF].

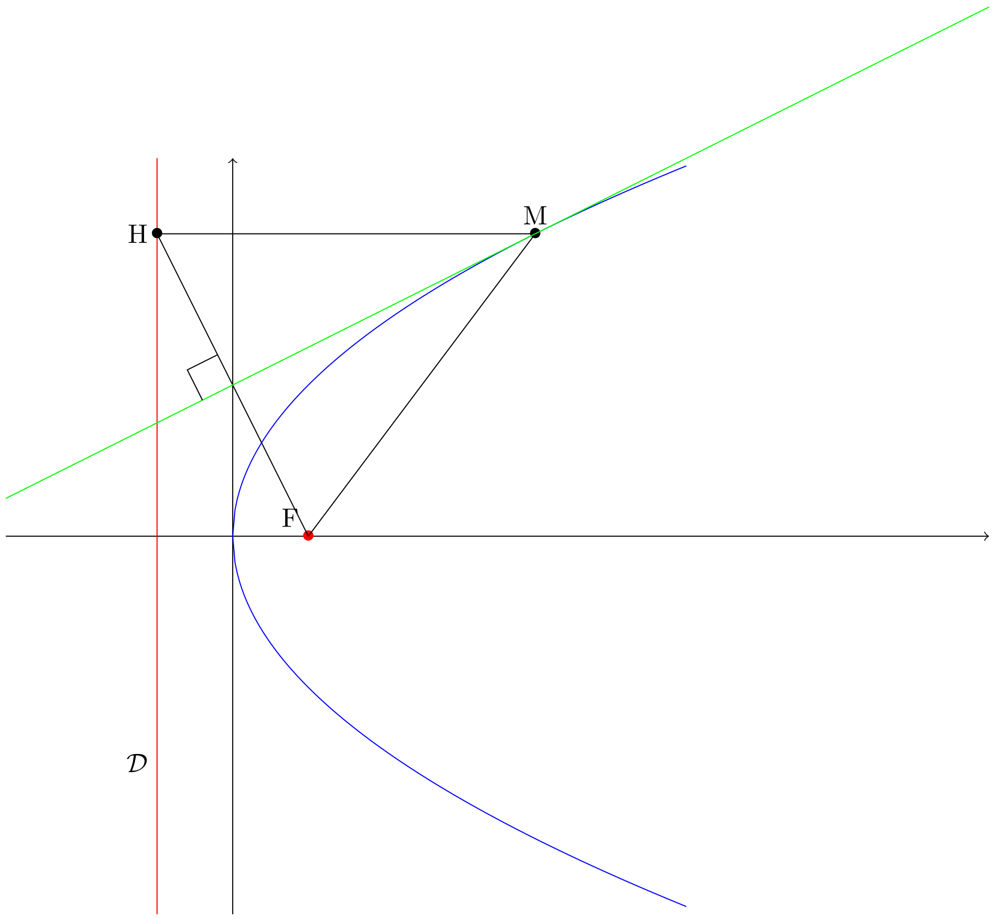
On trouve pour les divers points les coordonnées suivantes

$$\mathrm{H} = (-p/2, 0), \quad \mathrm{I} = (0, y/2)$$

donc $\overrightarrow{\mathrm{IM}} = \left(x, \frac{y}{2}\right)$. Un produit scalaire donne alors

$$\overrightarrow{\mathrm{IM}} \cdot \nabla f(x, y) = x \times (-2p) + \frac{y}{2} \times 2y = -2px + y^2 = 0.$$

La droite (IM) est perpendiculaire à $\nabla f(x, y)$ et elle passe par M donc c'est la tangente à $\mathcal{P}$ au point M.



Exercice 2. (**) On définit l'ensemble $\mathrm{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y^2 = x^3 - 2x\}$.

a. Tracer l'ensemble D.

b. Soient A et B deux points distincts de D d'abscisses négatives. Discuter le nombre de points d'intersection entre la droite (AB) et l'ensemble D.

Solution de l'exercice 2. a. L'ensemble D est la réunion des graphes des fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x^3 - 2x}$ et $-f$.

La factorisation $x^3 - 2x = x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ montre que l'ensemble de définition de f (et de $-f$) est la réunion des intervalles $[-\sqrt{2}, 0]$ et $[\sqrt{2}, +\infty[$.

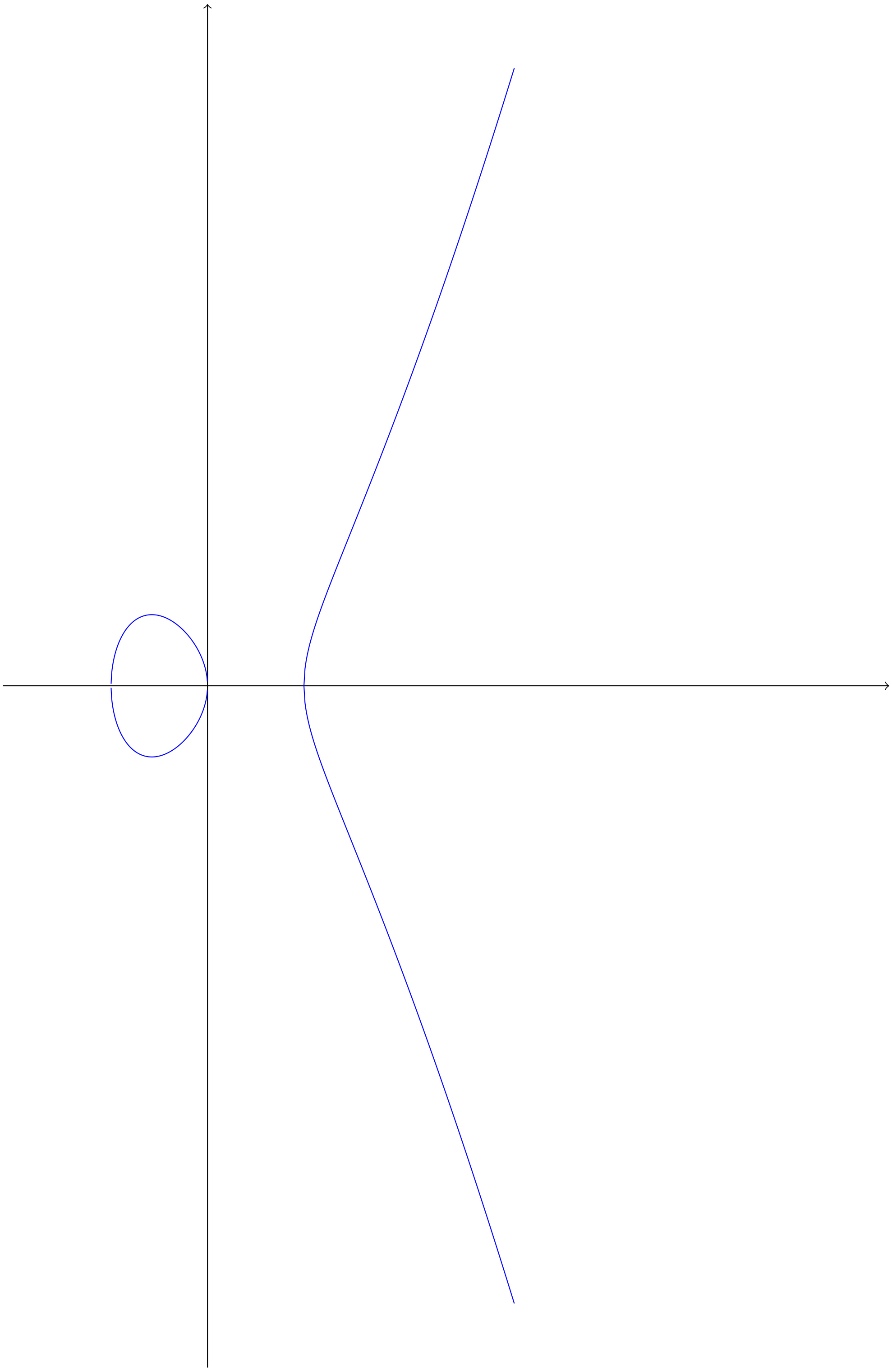
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\sqrt{2}, 0[$ et sur $]\sqrt{2}, +\infty[$, de dérivée

$$x \mapsto \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}}.$$

On observe en particulier que la dérivée f' possède des limites infinies en $-\sqrt{2}$, en 0 et en $\sqrt{2}$, si bien que le graphe de f admet des demi-tangentes verticales en ces points (qui se recollent avec les demi-tangentes du graphe de f en des tangentes verticales).

On remarque aussi que $f(x)/x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si bien que f a une croissante plus grande que linéaire, produisant sur le graphe de f une branche parabolique de direction verticale.

Sur l'intervalle $[-\sqrt{2}, 0]$, la fonction f est d'abord croissante sur $[-\sqrt{2}, -\sqrt{2/3}]$ puis décroissante sur $[-\sqrt{2/3}, 0]$. Elle est croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$.



b. On introduit les coordonnées (a_1, a_2) de A et les coordonnées (b_1, b_2) de B.

Si $a_1 = a_2$ (auquel cas $b_1 = -b_2$), alors $\mathrm{D} \cap (\mathrm{AB}) = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ (dans l'équation de D, il y a au plus deux valeurs pour l'ordonnée si l'abscisse est connue).

On suppose donc maintenant que $a_1 \neq a_2$ (la droite (AB) n'est pas verticale).

La droite (AB) admet alors une équation de la forme

$$y = ux + v.$$

Soit $\mathrm{M}(x, y)$ un point du plan.

$$\mathrm{M} \in (\mathrm{AB}) \cap \mathrm{D} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & ux + v \\ y^2 & = & x^3 - 2x \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & ux + v \\ (ux+v)^2 & = & x^3 - 2x \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & ux + v \\ 0 & = & x^3 - u^2x^2 - (2 + 2uv)x - v^2. \end{array} \right.$$

La deuxième ligne est alors une équation de degré 3 dont on sait qu'elle possède au moins les solutions a_1 et a_2. Le polynôme correspondant est donc scindé sur $\mathbb{R}$. Il possède une troisième solution, notée a_3, qui peut a priori être confondue avec a_1 ou a_2.

Les relations coefficients-racines donnent toutefois l'égalité

$$a_1 + a_2 + a_3 = u^2 \geqslant 0$$

donc $a_3 \geqslant 0$, ce qui garantit que a_3 est distinct de a_1 et a_2. L'intersection $(\mathrm{AB}) \cap \mathrm{D}$ contient donc un troisième point, situé sur la branche non bornée de la courbe D.

Remarque hors programme. Dans le domaine de la *géométrie projective*, on estime que la branche parabolique de direction verticale contient un « point à l'infini ». Dans le cas où la droite (AB) est verticale, on estime qu'elle passe par ce point, si bien que la droite (AB) recoupe D en un troisième point dans ce cas-là aussi.

Exercice 3. (*) On note $\mathcal{S}$ la surface d'équation $x^2 - y^2 - z^2 = 1$. On note P le plan d'équation $x + 2y - z = 0$.

Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{S}$ tels que le plan tangent à $\mathcal{S}$ au point M soit parallèle au plan P.

Solution de l'exercice 3. Introduisons la fonction $\mathrm{F} : (x, y, z) \mapsto x^2 - y^2 - z^2$, définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. La surface $\mathcal{S}$ est une ligne de niveau de F.

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on trouve

$$\nabla\mathrm{F}(x, y, z) = 2(x, -y, -z).$$

L'origine n'appartient pas $\mathcal{S}$ donc $\nabla\mathrm{F}(x, y, z)$ ne s'annule pour aucun point (x, y, z) de $\mathcal{S}$. Ainsi, la surface $\mathcal{S}$ admet en tout point (x, y, z) un plan tangent et celui-ci admet pour vecteur normal le vecteur $(x, -y, -z)$.

Le plan P admet pour vecteur normal $(1, 2, -1)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que le plan tangent au point (x, y, z) soit parallèle à P est donc que $(x, -y, -z)$ soit colinéaire à $(1, 2, -1)$, c'est-à-dire qu'il existe λ réel tel que

$$(x, -y, -z) = (\lambda, 2\lambda, -\lambda) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad (x, y, z) = (\lambda, -2\lambda, \lambda).$$

Pour tout λ réel, on trouve

$$\mathrm{F}(\lambda, -2\lambda, \lambda) = -4\lambda^2 \neq 1.$$

Il n'y a donc aucun point de $\mathcal{S}$ auquel le plan tangent soit parallèle au plan P.

C'est un peu nul, j'en conviens.

Alternate universe. Imaginons qu'on ait pris l'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (un hyperboloïde à une nappe). Cette fois, la condition serait que $(x, y, -z)$ soit de la forme $(\lambda, 2\lambda, -\lambda)$. On trouverait alors

$$\mathrm{F}(\lambda, 2\lambda, \lambda) = 4\lambda^2.$$

Les points de $\mathcal{S}$ solutions seraient alors ceux correspondants aux choix $\lambda = 1/2$ et $\lambda = -1/2$, c'est-à-dire les points $(1/2, 1, 1/2)$ et $(-1/2, -1, -1/2)$.

J'ai essayé de réaliser un dessin pour illustrer tout ceci, mais on n'y voit rien.

Exercice 4. (**) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les points $\mathrm{A} = (-1, 0, 1)$ et $\mathrm{B} = (3, 1, 0)$, ainsi que les vecteurs $\vec{u} = (2, 1, 0)$ et $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

a. Donner une représentation paramétrique de la droite D passant par A et dirigée par $\vec{u}$. Idem pour la droite Δ passant par B et dirigée par $\vec{v}$.

b. Montrer qu'il existe une valeur minimale de la distance MN lorsque M est un point qui parcourt la droite D et N est un point qui parcourt la droite Δ. On déterminera cette distance.

Solution de l'exercice 4. a. La droite D admet la représentation paramétrique

$$\mathrm{M} : s \mapsto (-1 + 2s, s, 1)$$

et la droite Δ admet la représentation paramétrique

$$\mathrm{N} : t \mapsto (3+t, 1+t, t).$$

Ces formules viennent des conventions $\overrightarrow{\mathrm{AM}(s)} = s\,\vec{u}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BN}(t)} = t\,\vec{v}$.

b. Pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, posons $f(s,t) = ||\overrightarrow{\mathrm{M}(s)\mathrm{N}(t)}||^2$. On peut exprimer la fonction f à l'aide des coordonnées de la question précédente

$$f(s,t) = (4-2s+t)^2 + (1-s+t)^2 + (-1+t)^2$$

puis chercher à appliquer la condition nécessaire d'extremum local, mais il n'est pas évident ensuite de montrer que la valeur obtenue est effectivement un minimum.

Sous forme vectorielle, on peut remarquer l'identité suivante

$$f(s,t) = ||\overrightarrow{\mathrm{M}(s)\mathrm{A}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BN}(t)}||^2 = ||\overrightarrow{\mathrm{AB}} - s\,\vec{u} + t\,\vec{v}||^2.$$

Le cours sur les espaces euclidiens nous apprend alors que cette fonction possède un minimum est que celui-ci est atteint au point (s,t) pour lequel le vecteur $s\,\vec{u} - t\,\vec{v}$ est le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sur le plan vectoriel $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

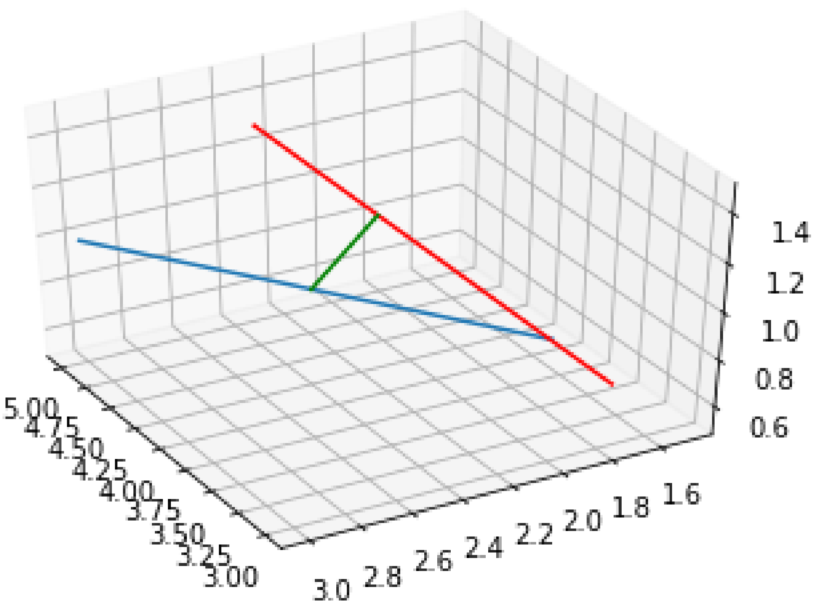
Notons (s,t) le couple à trouver. On sait que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}} - s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \vec{u} - s\vec{u} \cdot \vec{u} + t\vec{v} \cdot \vec{u} & = & 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \vec{v} - s\vec{u} \cdot \vec{v} + t\vec{v} \cdot \vec{v} & = & 0, \end{array}\right. \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 9-5s+3t & = & 0 \\ 4-3s+3t & = & 0. \end{array}\right.$$

On en déduit les valeurs $s = 5/2$ et $t = 7/6$. Les points correspondants sont

$$\mathrm{M}(s) = \left(4, \frac{5}{2}, 1\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N}(t) = \left(\frac{25}{6}, \frac{13}{6}, \frac{7}{6}\right).$$

Le vecteur correspondant est $\left(\frac{1}{6}, -\frac{2}{6}, \frac{1}{6}\right)$. Sa norme vaut $1/\sqrt{6}$.

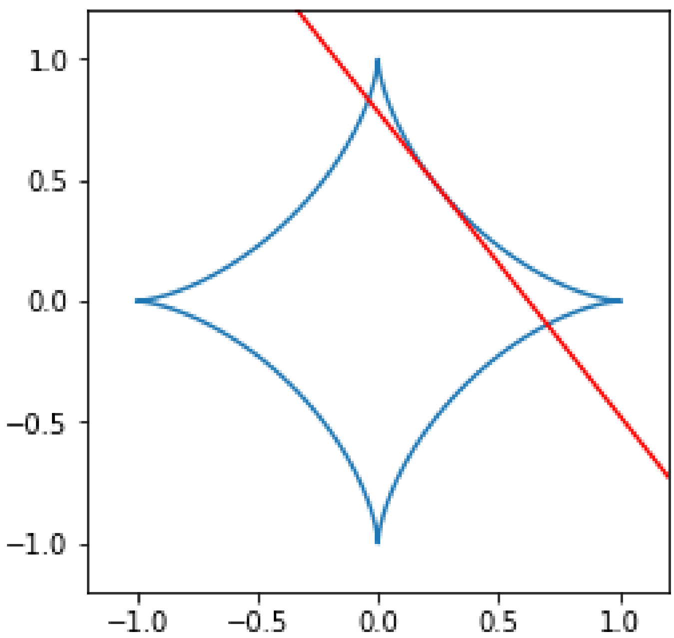


Méthode légèrement différente.

Appendice : code Python des exemples montrés en classe.

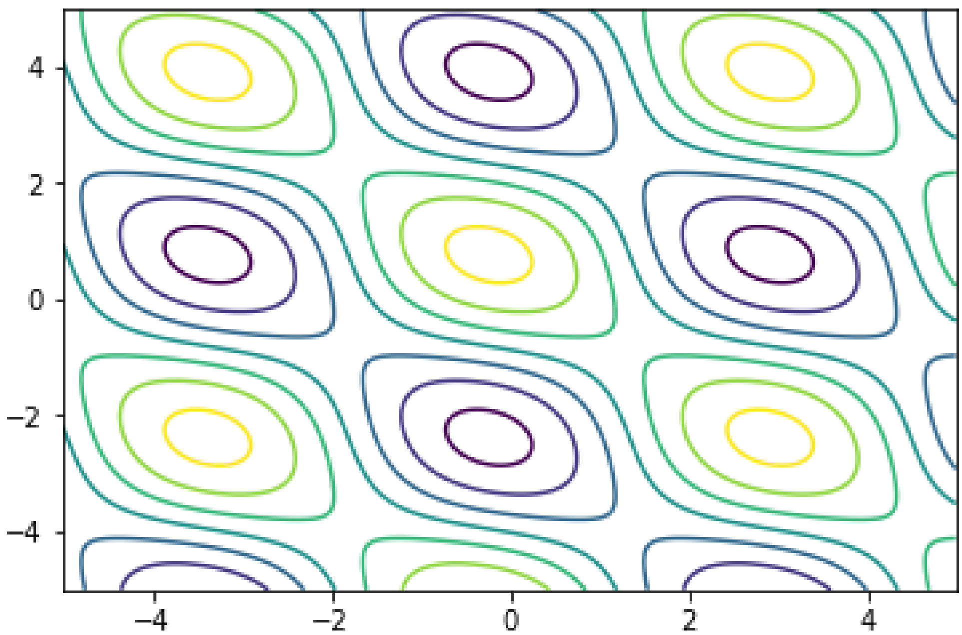
L'astroïde et une de ses tangentes

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def x(t):
    return np.cos(t)**3

def y(t):
    return np.sin(t)**3

nb_points = 500
t = np.linspace(0, 2*np.pi, nb_points)

# La fenêtre
fig = plt.figure()
plt.axes().set_aspect('equal')
taille = 1.2
plt.xlim([-taille, taille])
plt.ylim([-taille, taille])

# La courbe
plt.plot(x(t), y(t))

# Une tangente
n0 = nb_points // 7
t0 = 2*np.pi * n0/nb_points
t1 = 2*np.pi * (n0+1)/nb_points
x0, y0 = x(t0), y(t0)
x1, y1 = x(t1), y(t1)
dx = x1 - x0
dy = y1 - y0
plt.plot([x0 - 100*dx, x0 + 100*dx],
         [y0 - 100*dy, y0 + 100*dy], 'red')
```



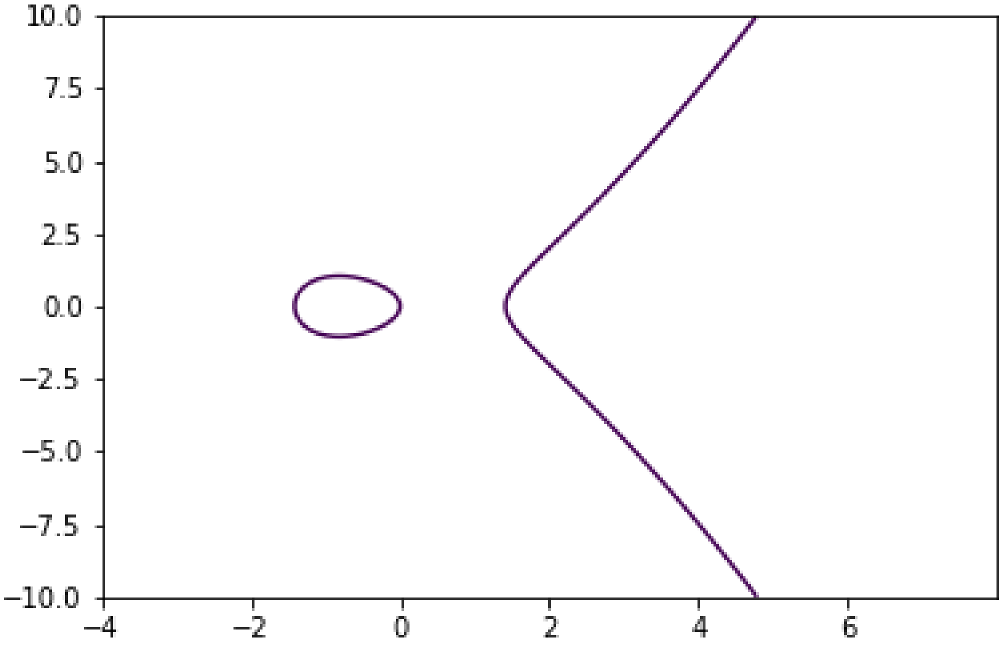
Une courbe définie par une équation implicite

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x, y):
    return np.sin(x+1) * np.sin(y) + np.cos(x+y)

delta = 0.025
x = np.arange(-5.0, 5.0, delta)
y = np.arange(-5.0, 5.0, delta)
# On convertit les tableaux unidimensionnels en tableaux bidimensionnels.
xx, yy = np.meshgrid(x, y)
z = f(xx, yy)

fig, ax = plt.subplots()
cs = ax.contour(x, y, z)
```



Courbe définie par une équation implicite, exercice 2.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x, y):
    return y**2 - x**3 + 2*x

delta = 0.025
x = np.arange(-4.0, 8.0, delta)
y = np.arange(-10.0, 10.0, delta)
xx, yy = np.meshgrid(x, y)
z = f(xx, yy)

fig, ax = plt.subplots()
cs = ax.contour(x, y, z, [0])
```


10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
−2.5
−5.0
−7.5
−10.0
−4
−2
0
2
4
6