

Exercice préliminaire

Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles strictement positives, décroissante, autre que la fonction nulle. On fait l'hypothèse

$$\forall (u, v) \in ([0, +\infty[)^2, \quad f(u+v) = f(u)f(v).$$

Pour tout $u \geq 0$, montrer l'égalité $f(u) = f(1)^u$.

Processus de Poisson

On considère un système mécanique dans lequel surviennent des pannes. On modélise l'occurrence des pannes comme suit. Pour tout t dans $[0, +\infty[$, le nombre de pannes qui se produisent dans l'intervalle temporel $[0, t]$ est une variable aléatoire N_t à valeurs dans $\mathbb{N}$. On considère que le système est réparé instantanément après chaque panne. On considère donc ici une famille $(N_t)_{t \in [0, +\infty[}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Remarquons que la modélisation impose que pour tout t positif et tout $u \geq t$, la variable aléatoire $N_u - N_t$ soit à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On fait les hypothèses suivantes :

- la variable aléatoire N_0 est égale à 0 ;
- pour tout $t > 0$, le nombre $\mathbb{P}(N_t = 0)$ appartient à $]0, 1[$;
- pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout $(n+1)$ -uplet $(t_0, \dots, t_n)$ strictement croissant d'éléments de $[0, +\infty[$, les variables aléatoires $N_{t_0}, N_{t_1} - N_{t_0}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes (*hypothèse d'accroissements indépendants*) ;
- pour tout couple (s, t) d'éléments de $[0, +\infty[$ soumis à la condition $0 < s < t$, la variable aléatoire $N_t - N_s$ a la même loi que N_{t-s} (*hypothèse d'accroissements stationnaires*) ;
- le quotient $\mathbb{P}(N_h > 1)/h$ tend vers 0 quand h tend vers 0 par valeurs strictement positives.

1. Pour tout u dans $[0, +\infty[$, on note G_u la fonction génératrice de la variable aléatoire N_u , que l'on définit simplement sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$G_u(s) = \mathbb{E}(s^{N_u}).$$

On fixe s dans $[0, 1]$.

a. Prouver que la fonction $t \mapsto G_t(s)$ est décroissante sur $[0, +\infty[$.

b. Pour tout couple (u, v) d'éléments de $[0, +\infty[$, prouver l'égalité $G_{u+v}(s) = G_u(s)G_v(s)$.

c. Prouver que $G_1(s)$ est strictement positif. On pose alors $\theta(s) = -\ln(G_1(s))$.

d. Pour tout u dans $[0, +\infty[$, prouver l'égalité $G_u(s) = e^{-u\theta(s)}$.

e. En déduire que le quotient $(G_h(s) - 1)/h$ tend vers $-\theta(s)$ quand h tend vers 0 par valeurs strictement positives.

2. Pour tout s dans $[0, 1]$, prouver que le quotient

$$\frac{1}{h} \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(N_h = k)(s^k - 1)$$

tend vers 0 quand h tend vers 0 par valeurs strictement positives.

3. En déduire que le quotient $\mathbb{P}(N_h = 1)/h$ possède une limite finie quand h tend vers 0 par valeurs strictement positives. Cette limite est notée α .

De plus, pour tout s dans $[0, 1]$, prouver l'égalité $\theta(s) = \alpha(1 - s)$.

4. En considérant $G_u(0)$, prouver que α est strictement positif.

5. Pour tout $u > 0$, prouver que la variable aléatoire N_u suit la loi de Poisson de paramètre αu .

Une famille de variables aléatoires $(N_t)_{t \in [0, +\infty[}$ telle que celle étudiée ici s'appelle un *processus de Poisson*. La constante α est le *paramètre* de ce processus de Poisson.

La suite de l'étude n'est pas faisable dans le cadre de notre programme. On y prouve que l'instant où se produit la première panne est une variable aléatoire T qui suit une *loi exponentielle* de paramètre α . Cela signifie que pour tout $t > 0$, la probabilité de l'événement $[T > t]$ vaut $\exp(-\alpha t)$.