

## Suggestions de révisions pour l'écrit

Ce document tente de donner des pistes pour optimiser le travail des différents chapitres. L'idéal est bien sûr d'être au point sur tout mais, selon votre niveau d'ambition, vous pouvez envisager de concentrer vos efforts sur certains aspects du cours et sur certains exercices emblématiques. Cette liste ne se veut pas exhaustive.

---

### Chapitre 1 : analyse en une variable et polynômes

On veillera à être bien au point sur le programme de première année (théorème des valeurs intermédiaires, Rolle, accroissements finis, calcul de dérivées, calcul de primitives, intégration, développements limités, calculs de limites). S'il reste des confusions autour des notions de domination, négligeabilité et d'équivalence, ça peut valoir le coup de prendre le temps de clarifier tout ça.

L'exercice 18 illustre la méthode générale à employer pour manipuler des intégrales à bornes variables.

L'exercice 15 illustre comment utiliser le théorème de la limite de la dérivée (question b) et comporte une jolie récurrence au passage (question a).

Une bonne utilisation du théorème de Rolle est présente dans l'exercice 11. Une autre se trouve dans la question 36 du devoir de l'été 2017.

L'exercice 1 montre comment exploiter les encadrements par des intégrales pour trouver un équivalent d'une somme.

Le lemme de Riemann-Lebesgue (exercice préliminaire du devoir surveillé 2) est à savoir démontrer.

Les plus ambitieux gagneront à se familiariser avec la méthode du théorème de Césàro (exercice 6), notamment avec le maniement des  $\varepsilon$ .

---

### Chapitre 2 : produits scalaires

Ce chapitre comporte une grande quantité de définitions et de propriétés de cours, qu'il faut bien assimiler, notamment les histoires de projections orthogonales et les liens entre produit matriciel et produit scalaire.

Les thématiques des exercices 13 et 14 sont classiques, de même que la question de minimisation de l'exercice 2.

L'exercice 2 du devoir surveillé 1, consacré aux polynômes de Legendre, est un bon sujet de révision, pour travailler à la fois le calcul, les raisonnements sur les polynômes et les raisonnements en contexte euclidien. Idem pour les polynômes de Laguerre (problème III du devoir surveillé 2) et pour les polynômes de Tchebychev (exercice 5 du devoir en temps libre 1).

---

### Chapitre 3 : séries numériques

Les séries étudiées dans les exercices 1 et 2 sont un bon support pour assimiler les techniques classiques d'étude de convergence (en plus des exemples du cours). Les exercices 4 et 5 illustrent à la fois l'utilisation de développements limités pour l'étude de convergence — noter l'utilisation de la convergence absolue — et le recours à la série des différences pour prouver qu'une suite converge.

L'exercice 6 est l'occasion d'effectuer des calculs de sommes (de séries entières).

L'exercice 13 explore bien le théorème des séries alternées.

Les plus ambitieux tireront profit d'un nouveau coup d'œil à l'exercice 19.

---

### Chapitre 4 : intégrales généralisées

Il est important de comprendre les problématiques de ce chapitre ainsi que les techniques usuelles pour les résoudre (il y a souvent des valeurs absolues, par exemple). Il faut aussi comprendre comment se rédigent les changements de variable (la notion de bijection nécessite de mentionner *deux* intervalles).

Pour assimiler les techniques usuelles d'étude de convergence, les exemples du cours peuvent être complétés par les intégrales des exercices 1, 2, 3, 4 et 5. Éventuellement le 13 aussi.

L'exercice 6 est un passage obligé, en lien avec les chapitres 11 et 12.

Les plus ambitieux pourront consulter l'exercice 11. Je leur conseille également d'être bien au point sur les problématiques du paragraphe 3 de ce chapitre.

L'exercice 4 du devoir en temps libre 3 illustre une manière compliquée de mettre en lien séries et intégrales.

### Chapitre 5 : espaces vectoriels normés

La priorité est de maîtriser les techniques employées pour justifier qu'une fonction est une norme (le cours contient une foule d'exemples). En particulier, j'ai bien insisté sur la manière dont on prouve des majorations sur les bornes supérieures. Ces techniques sont mises en lumière dans l'exercice 2.

L'exercice 7 est une bonne illustration de l'interaction entre l'algèbre linéaire et les questions de convergence.

Pour aller plus loin, je recommande l'exercice 7 du devoir en temps libre 5, qui est tiré tout droit de plusieurs sujets de concours.

### Chapitre 6 : suites de fonctions

Les exercices 1 et 2 sont un bon complément aux exemples du cours.

Les exercices 4 et 5 peuvent être profitables aux plus ambitieux.

### Chapitre 7 : séries de fonctions

Un travail linguistique s'impose : faire le tri dans tous les objets manipulés

- la fonction  $f_n$  ;
- le nombre  $f_n(x)$  ;
- le nombre  $\|f_n\|_\infty$  ;
- la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq n_0}$  ;
- la suite numérique  $(f_n(x))_{n \geq n_0}$  ;
- la suite numérique  $(\|f_n\|_\infty)_{n \geq n_0}$  ;
- la série de fonctions  $\sum_{n \geq n_0} f_n$  ;
- la série numérique  $\sum_{n \geq n_0} f_n(x)$  ;
- la série numérique  $\sum_{n \geq n_0} \|f_n\|_\infty$  ;
- la fonction  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$  ;
- le nombre  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ .

Les exercices 1, 4 et 5 résument la plupart des techniques classiques à base de convergence normale et d'encadrement par des intégrales.

L'exercice 3 présente une technique classique d'obtention de convergence uniforme en exploitant le théorème des séries alternées.

Le problème 1 du devoir en temps libre n° 4 illustre ce qui peut être posé de raisonnable sur ce thème.

Le problème III du devoir surveillé 3 (piste bleue) est un autre bon entraînement aux maniements d'inégalités avec des intégrales.

Les exercices 3 et 4 du devoir en temps libre 4 sont des grands classiques.

## Chapitre 8 : algèbre linéaire de première année

Les exercices 2, 10, 11, 16, 27, 28 et 29 constituent une bonne base<sup>1</sup> de révision, mais il faut bien sûr compléter cela avec les exercices vus en première année, notamment les vérifications de type « Montrer que tel ensemble est un sous-espace vectoriel de tel autre. », « Montrer que telle application est linéaire. », « Montrer que telle famille est libre. » et « Trouver le noyau et l'image de telle matrice ou application linéaire. ».

La méthode du pivot par blocs est également un incontournable, de même que l'exercice 21.

Les endomorphismes nilpotents (exercice 12) ne sont pas au programme, mais ça pourrait bien tomber un jour.

Pour aller un peu plus loin, les exercices 25 et 31 sont recommandables.

Pour aller encore plus loin, je conseille de fréquenter les exercices 13, 14, 15, 20 et 33. Ainsi que le problème I du devoir surveillé 3 (piste rouge).

---

## Chapitre 9 : réduction des matrices et des endomorphismes

Dans ce chapitre, il y a encore un peu de vocabulaire à apprendre. Surtout, il faut être au point sur les caractérisations et les correspondances entre les différents points de vocabulaire.

L'exercice 1 donne quelques exemples efficaces pour saisir en quoi consiste la diagonalisation d'une matrice de petite taille. Pour une matrice de taille quelconque et de rang petit, les exercices 2 et 4 s'imposent. L'exercice 13 résume bien comment on aborde les questions de diagonalisation dans le monde des matrices par blocs. L'exercice 6 donne un exemple de réduction d'endomorphisme où les matrices interviennent peu. L'exercice 8 illustre bien la manière dont on gère les valeurs propres multiples.

Pour aller un peu plus loin, on reverra avec profit l'exercice 1 du devoir en temps libre 8, notamment pour ce qui touche à la gestion des valeurs propres non réelles de matrices réelles ; on fera notamment bien attention aux différences de maniement entre endomorphismes et matrices.

---

## Chapitre 10 : séries entières

Ce chapitre comporte peu de définitions et de théorèmes mais il convient une fois de plus d'être parfaitement au point là-dessus. Les développements en série entière des fonctions usuelles sont à maîtriser, de même que leurs domaines de validité.

Les exercices 1, 2 et 4 donnent de bonnes bases concernant l'étude des rayons de convergence — on remarquera qu'on n'utilise que rarement la règle de d'Alembert. Côté calcul, les exercices 6, 8 et 12 sont incontournables.

Pour aller encore plus loin, il y a les exercices 16 et 15, ainsi que le problème I du devoir surveillé 5 (piste rouge).

---

## Chapitre 11 : théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale

Ces deux théorèmes sont à connaître impeccablement (aucune valeur absolue n'est à négliger).

Les exemples traités en classe sont à savoir refaire, y compris celui où le théorème d'intégration terme à terme est utilisé dans une démonstration par l'absurde. Attention à bien comprendre la subtilité de l'exercice 3.

On trouve de bons exemples d'intégration terme à terme dans le problème I du devoir en temps libre 6.

---

**Chapitre 12 : intégrales dépendant d'un paramètre** : connaître impeccablement tous les théorèmes de ce chapitre. Analyser en détail les mises en pratique sur les exemples du cours, notamment le caractère  $\mathcal{C}^\infty$  de la fonction  $\Gamma$ .

Exercices 2, 4 et 5.

On accueillera d'un sourire l'apparition de chaque **valeur absolue**, ce qui devrait suffire à illuminer la journée.

L'exercice 6 permet d'approfondir les choses et de faire le lien avec le chapitre 7.

---

1. Astuce.

---

### Chapitre 13 : fonctions vectorielles

Ça peut toujours valoir le coup de rejeter un coup d'œil aux règles de dérivation.

---

### Chapitre 14 : équations différentielles linéaires

Les techniques de résolutions d'équations différentielles de première année doivent être parfaitement maîtrisées, avec de plus une couche de vernis supplémentaire en termes de rigueur logique, maintenant que vous avez suffisamment de recul pour ça.

Le théorème de Cauchy linéaire est à connaître sous toutes ses formes. Les diverses techniques classiques de résolution (changement de fonction inconnue, recherche d'une solution sous forme d'une somme de série entière) méritent que vous y reveniez, afin de travailler là encore les aspects logiques, comme les aspects calculatoires.

Pour cela, je recommande les exercices 1, 4, 7, 10, 11, 13 et 14.

Pour un problème riche en calculs et en aspects logiques, je propose de revoir l'exercice 2 du devoir en temps libre 8.

Les plus ambitieux se pencheront avec profit sur l'exercice 20.

---

### Chapitre 15 : espaces euclidiens (bis)

La définition d'un produit scalaire est à connaître avec précision. Il faut connaître les liens entre produit scalaire et calcul matriciel et, autant que possible, dédramatiser la notion de projection orthogonale, qui est une notion géométrique essentielle.

Les propriétés des matrices orthogonales et des matrices symétriques sont à connaître impeccablement (elles ont l'avantage d'être peu nombreuses), la plus importante étant bien sûr le théorème spectral.

Parmi les exercices représentatifs, je préconise les numéros 6 et 8.

On peut aller plus loin avec les exercices 9 et 10, ainsi que la partie III du devoir surveillé 6 (piste rouge), voire la partie II de la piste noire du même devoir.

Le problème II du devoir en temps libre 9 est pour l'essentiel une création de ma part (inspirée de plusieurs exercices d'oral). Les techniques de raisonnement qu'on y rencontre méritent l'attention, notamment les allées et venues entre matrices et endomorphismes.

---

### Chapitre 16 : probabilités

Il faut comprendre la place de chaque concept, afin de ne pas s'emmêler entre événements, variables aléatoires, univers et valeurs. Les schémas à base d'arbres manipulés au lycée ne sont pas à proscrire mais il ne peuvent plus suffire à justifier des calculs : il faut maintenant les formaliser au moyen des règles de calcul du cours (on exprime des relations entre événements puis on applique les règles de calcul sur les probabilités).

Les lois classiques sont à connaître impeccablement, de même que les propriétés générales de l'espérance (notamment la linéarité et la formule du transfert), de la variance et de la fonction génératrice.

Sur le dénombrement, je recommande particulièrement l'exercice 5.

Sur les probas finies, les exercices 8 et 10 font manipuler les lois classiques. L'exercice 11 présente une utilisation assez classique de l'inégalité de Markov.

Sur les probas infinies, les exercices 12 et 13 font bien travailler les opérations sur les événements ; les exercices 17 et 18 fournissent des illustrations simples de la formule du transfert ; les exercices 22 et 23 sont des calculs incontournables sur la loi de Poisson ; les exercices 20 et 21 sont des grands classiques autour de la loi géométrique.

Pour les plus ambitieux, je conseille l'exercice 19 de cette fiche ainsi que l'exercice 24. J'ajoute le lemme de Borel-Cantelli (devoir en temps libre n° 9, exercice 1).

---

**Chapitre 17 : fonctions de plusieurs variables** : la définition d'une dérivée partielle (raisonnement sur des fonctions d'une seule variable) et d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sont évidemment à maîtriser, de même que la règle de la chaîne et la définition du gradient (il est à valeurs vectorielles).

Les théorèmes sur les extremums sont indispensables. Un corollaire est la nécessité d'apprendre à justifier rigoureusement et simplement le fait qu'un ensemble soit ouvert ou fermé.

Il faut comprendre la démarche logique (et calculatoire) des raisonnements par analyse-synthèse employés pour résoudre les équations aux dérivées partielles.

Les exercices 8 et 15 sont des révisions de choix, ainsi que le calcul menant au laplacien en coordonnées polaires.

La partie III du devoir en temps libre 10 est une bonne piste pour aller voir plus loin.

---

**Chapitre 18 : courbes et surfaces** : il est absolument essentiel de — non, je plaisante. Ce chapitre est tellement vide que je ne vois pas comment on pourrait vous infliger quoi que ce soit à ce sujet. Cela dit, les notions cinématiques de vecteur vitesse et vecteur accélération sont à connaître au moins pour la physique. Savoir que le vecteur vitesse dirige la tangente quand il est non nul est tout de même utile.

Surtout, mes rapides points de méthode pour obtenir une équation de droite pourraient se révéler utiles à l'occasion.

---